

Билет № 1.

Формулировка задачи оптимизации поиска равновесия
~~Рыночной~~ объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков
 и потребителей одного товара с ограничениями на
 передачу

Рассмотрим рынок. Пусть спрос равен V

Каждый поставщик характеризуется след. параметрами:

- V_i - объем поставки;
- C_i - цена за товар i -го поставщика;

Заявки поставщиков упорядочиваются по возрастанию:

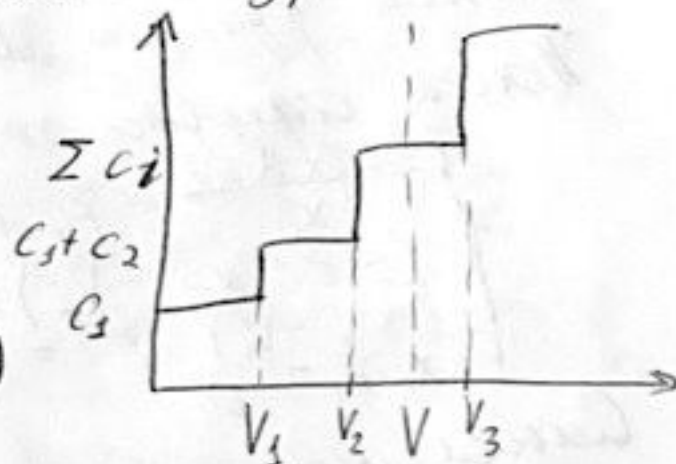
$$C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_n$$

Два основных подхода:

1) Маргинальное ценообразование:
 выбирается максим. цена, объем
 которой был выбран рынком (C_k)

$$\hat{V}_k = V - \sum_{i=1}^{k-1} V_i$$

$$\hat{V}_k \leq V_k$$



2) Ценообразование по заявкам: цены соответствуют заявкам.

Пусть x_i - объем i -поставщика. Сформулируем след. задачу оптимизации

$$\begin{cases} \min_{x_i} \sum_{i=1}^n C_i x_i \\ 0 \leq x_i \leq V_i \\ \sum_{i=1}^n x_i = V \end{cases}$$

Решение этой задачи - это решение
 аукциона марг. цены.

Каждый поставщик i принимает x_i - объем, принимаемый у i -го поставщика, $x_i \in [0, V_i]$
 Им соответствуют цены p_i , $i = \overline{1, n}$. Тогда задача оптимизации
 следующая:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min_{x \in R} \\ x_i \leq V_i, (\pi_i^+) \\ 0 \leq x_i, (\pi_i^-) \\ \sum_{i=1}^n x_i = V_c, (\lambda_0) \end{cases}$$

В скобках помечены множители Лагранжа, соответствующие ограничениям задачи (неотриц. числа)

Таким образом, можем составить ф-цию Лагранжа для нашей задачи оптимизации:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)$$

$$L(x, \lambda_0, \pi) = \langle p, x \rangle + \lambda_0 (\langle e, x \rangle - V_e) + \sum_{i=1}^n (\langle e_i, x \rangle - V_i) \pi_i^+ - \sum_{i=1}^n (\langle e_i, x \rangle) \pi_i^-, \text{ где } \lambda_0 \geq 0, \pi_i^+ \geq 0 \text{ и } \pi_i^- \geq 0$$

Теорема (Куна-Таккера): для того чтобы пара векторов p^*, x^* являлись решением задачи оптимизации $\Leftrightarrow$ чтобы $\exists \lambda_0^* \geq 0, \pi_i^* \geq 0$, что $(x^*, \lambda_0^*, \pi^*)$ явл. седловой точкой функции Лагранжа соответствующей задачи.

Правила седловой точки ф-ции Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda, \pi)}{\partial x_i} = p_i + \lambda_0 + \pi_i^+ - \pi_i^- = 0 & (1) \\ (\langle e_i, x \rangle - V_i) \pi_i^+ = 0, & (2) \\ (x_i - V_i) \pi_i^+ = 0, & (3) \\ x_i \pi_i^- = 0 & (4) \end{cases}$$

Смысл условий Лагранжа:

- 1) λ_0 - равноценная маржинал. цена аукциона
- 2) π_i^+ - прибыль i -го поставщика
- 3) π_i^- - убыток i -го поставщика.

Тогда: $p_i + \pi_i^+ - \pi_i^- = -\lambda_0$

$\square x_i^* > 0$. Тогда из четвертого уравнения имеем равенство, что $\pi_i^{*-} = 0$ и соотв. $p_i + \pi_i^{*+} = -\lambda_0$

$\square x_i^* = 0 \Rightarrow$ из (3) и (4): $\pi_i^{*-} = 0 \Rightarrow p_i = -\lambda_0$

$x_i \in [0, V_i], \frac{d\langle p, x(V_i) \rangle}{dV_i} = -\lambda_0(V_i)$, где $-\lambda(V_i)$ показывает чувствительность.

Применительно к рынкам электроэнергии выделяют два вида аукционов: либо это **односторонний аукцион**, где предложение основано на ценовых заявках продавцов, а спрос покупателей оценивается системным оператором (балансирующий рынок), либо **двусторонний аукцион**, когда и покупатели, и продавцы подают ценовые заявки.

Балансирующий – как и во всех других рынках должна существовать купля-продажа не только плановых объемов, но и фактических объемов производства/потребления электроэнергии. Эту задачу в российском рынке решает балансирующий рынок.

Простой аукцион единая цена – аукцион с учетом пропускной способности, основанный на зональном ценообразовании. В таком аукционе энергосистема разделяется на зоны, в каждой из которых рассчитывается своя единая равновесная цена (зональная цена) и определяются принятые объемы. Цены и объемы складываются под воздействием спроса и предложения участников рынка внутри зоны, а также с учетом перетоков электрической энергии из других зон;

Аукцион с учетом пропускной способности зональные пены – аукцион с учетом потерь и полной картины электрических режимов (условий потока распределения) в единой электрической сети.

Аукцион с учетом всех системных ограничений узловые цены

Последние два аукциона называются **распределенными**. В них решается задача поиска равновесной точки при учете связанных ограничений, обусловленных сетевой структурой электрической системы, и определяется своя равновесная цена в каждом узле/зоне. Заметим, что если бы в сети не было потерь и ограничений пропускной способности, то цена за электрическую энергию и в самом деле была бы одинакова по всей энергетической системе. Однако из-за их наличия (ограничений или потерь) возникает дифференциация цен. Распределенные аукционы рекомендуются не только электроэнергетике, но, к примеру, в рынках газа – в любых рынках, где существенна транспортная составляющая в цене.

Свойства узловых цен

Равновесные узловые цены на электрическую энергию определяются для каждого узла расчетной модели с соблюдением нижеперечисленных условий:

- а) равновесные цены на электрическую энергию одинаковы для всех объемов электрической энергии, точка поставки которых отнесена к одному узлу расчетной модели;
- б) для поставщика электрической энергии равновесная цена не может быть ниже цены, указанной им в ценовой заявке на объем электрической энергии, отнесенный к соответствующему узлу расчетной модели и прошедший (принятый) в аукционе, и не может быть выше цены, указанной им в заявке на непрошедший в аукционе объем;
- в) для покупателя электрической энергии равновесная цена не может быть выше цены, указанной им в ценовой заявке на объем электрической энергии, прошедший (принятый) в аукционе, но и не может быть ниже цены, указанной им в ценовой заявке на тот объем, который оказался непринятым в аукционе;

г) равновесные цены на электрическую энергию должны отражать влияние системных ограничений и стоимость потерь электрической энергии, зависящих от электроэнергетических режимов.

Формулы заданы в предыдущем билете.

$$S_i p_{\min i} \leq X_i \leq p_{\max i} \cdot S_i \quad S_i \in \{0, 1\}$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2$$

$$C_1, C_2$$



$$X_1 + X_2 = d \quad d = 100$$

$$p_{\min 1} = 60 \quad p_{\max 1} = 110, \quad C_1 = 1000$$

$$p_{\min 2} = 30 \quad p_{\max 2} = 80 \quad C_2 = 700$$

$$X_1^* = 60$$

$$X_2^* = 40$$

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 \rightarrow \min$$

$$\lambda \cdot X_1 + X_2 = d$$

$$\lambda^* = 700$$

$$X_1 \in [60, 110]$$

$$X_2 \in [30, 80]$$

$$X^0 = \underline{\underline{1000}}$$

Б) Мат. и фин. балансы, Описание одного из эк. агентов в однопред. модели.

Осн ф. воз-ва: сбор налогов и их распределение

A - мн-во эк. агентов

P - продукты (то, что пр-ва)

R - ресурсы

$\exists A \in A, i \in P \cup R$

$$0 \approx \frac{dQ_i^A(t)}{dt} = \underbrace{X_i^A(t)}_{\substack{\text{запас} \\ \text{рес-са } i \\ \text{у агента } A}} - \underbrace{C_i^A(t)}_{\substack{\text{производство} \\ \text{конст.} \\ \text{потреб.}}} - \underbrace{V_i^A(t)}_{\substack{\text{затраты} \\ \text{на пр-во}}} - \underbrace{J_i^A(t)}_{\substack{\text{кан.} \\ \text{затр}}} - \sum_{\substack{B \in A \\ B \neq A}} \overbrace{X_i^{AB}(t)}^{\substack{\text{передача} \\ \text{продукта}}}$$

$\exists$ агент произв. 1 продукт, т.е. в уст. сит. запас товара у пр-ва не изменяется.

$$Y_i^A(t) = X_i^A(t) - V_i^A(t) - \text{чистый выпуск.}$$

$$Y_i^A(t) \leq M_i^A(t) - \text{произв. мощности}$$

$$dM^A(t) = -\underbrace{\mu^A M^A(t)}_{\text{портитса}} + \underbrace{\frac{J^A}{\theta^A}}_{\text{вложение}}$$

μ^A - коэф. износа

$$Y_i^A = C_i^A + J_i^A + \sum_{\substack{B \in A \\ B \neq A}} X_i^{AB} - \text{ур. баланса (для стабил. предпр.)}$$

Чтобы выйти на макроуровень, нам нужно перейти к фин. эквивалентам $X_i^{AB}(t) \sim \Phi_i^{BA}(t)$ - платим.
(потоку товаров сразу идет поток денег)

$$X_i^A \sim \tilde{X}_i^A, Y_i^A \sim \tilde{Y}_i^A, V_i^A \sim \tilde{V}_i^A, J_i^A \sim \tilde{J}_i^A, C_i^A \sim \tilde{C}_i^A$$

$$\tilde{Y}_P = \underbrace{\tilde{C}_P}_{\substack{\text{добав.} \\ \text{ср-во}}} + \underbrace{\tilde{J}_P}_{\substack{\text{порт.} \\ \text{расх.}}} + \sum_{B \in A} \underbrace{\tilde{\Phi}_P^{BA}(t)}_{\substack{\text{инв.} \\ \text{в} \\ \text{пр-во}}}$$

$\tilde{X}_P^A$ - однов. пр-ва

$\tilde{V}_P^A$ - мат. затраты

$\mu^A \sim \tilde{\mu}^A$

$$\boxed{\frac{d\tilde{k}^A}{dt} \approx \tilde{J}_P^A - \mu^A \tilde{k}^A} \quad \text{амортизация}$$

⑤ продолжение
 $\sum N \subseteq A$ - по лим-во аентов го-ва.

$$\underbrace{\tilde{Y}_P^N}_{\text{ВВП}} + \underbrace{\tilde{T}_P^N}_{\substack{\text{ИМПОРТ} \\ \text{(плата за загранич. товары)}}} = \underbrace{\tilde{C}_P^N}_{\substack{\text{потребление,} \\ \text{консп. потребителю}}} + \underbrace{\tilde{I}_P^N}_{\text{накопления}} + \underbrace{\tilde{E}_P^N}_{\text{экспорт.}}$$

осн. макроэк. тождество (макроэк. баланс)

Опишем государство в однопред. модели:

$$\underbrace{\frac{dN^a}{dt}}_{\substack{\text{прирост} \\ \text{кассовых} \\ \text{остатков}}} = - \underbrace{\Phi_G^{\mathcal{L}}}_{\substack{\text{оплата} \\ \text{гос.} \\ \text{закупок.}}} + \underbrace{T^{\mathcal{B}}_g}_{\substack{\text{налоги} \\ \text{от} \\ \text{банков}}} + \underbrace{T^{\mathcal{P}}_g}_{\substack{\text{налоги} \\ \text{от} \\ \text{произво-} \\ \text{дителей}}} + \underbrace{T^{\mathcal{H}}_g}_{\substack{\text{налоги} \\ \text{от} \\ \text{населения}}} + \underbrace{T^{\mathcal{C}}_g}_{\substack{\text{прибыль} \\ \text{цб}}} - \underbrace{T^{\mathcal{H}}_g}_{\substack{\text{посадка} \\ \text{из/п} \\ \text{гос.} \\ \text{случ.}}} + \underbrace{\frac{dL^{\mathcal{C}}}{dt}}_{\substack{\text{прирост} \\ \text{внутр.} \\ \text{гос. долга}}} - \underbrace{R^{\mathcal{C}}}_{\substack{\text{процентные} \\ \text{платежи.}}}$$

Однопред. модель - пред. агрегир. модель эк-ки. Она
 должна объясн, как изм. со временем составляющие
 осн. макроэк. баланса в рез-те вз-ия аентов, рассматривая
 движение только одного ободу. продукта - (реальной ВВП

5. Мат-ые и гн-ые балансы. Описание агентов из динамической модели (произ-во, зап-во, рас-во, капитал-ный счет) в динамической модели.

Дан-ая ф-ия Государства сбор налогов и их распределение.

A - мн-во экономических агентов

P - продукты (то, что производ-я)

R - ресурсы (какая продукция в данной модели / экономике)

$\exists A \in \mathcal{A}, i \in P \cup R$

$$0 \approx \frac{dQ_i^A(t)}{dt} = X_i^A(t) - C_i^A(t) - V_i^A(t) - J_i^A(t)$$

$\uparrow$ в текущей ситуации $\uparrow$ общие ресурсы агента A / материальный баланс $\uparrow$ производство / потребление $\uparrow$ затраты на производство (текущие) $\uparrow$ капитальные затраты

$$- \sum_{B \in \mathcal{A}} X_i^{AB}(t)$$

$B \neq A$ передача продукта

$$X_i^{AB}(t) = -X_i^{BA}(t) \geq 0$$

производит 1 продукт

Предположим, что 1 агент производит 1 продукт т.е. в текущей ситуации общее товара у производителя не уменьшается, это кол-во само по себе удовлетворяет (больше хранить невозможно; меньше - не хватает)

$$Y_i^A = X_i^A(t) - V_i^A(t) - \text{чистый выпуск}$$

$$Y_i^A \leq M_i^A(t) - \text{производительная мощность}$$

(основные средства производства стареют, но могут наращиваться за счет капитальных затрат)

Будем считать, что один производитель производит один товар.

$$dM^A(t) = \underbrace{-M^A M^A(t)}_{\text{портится}} + \underbrace{\frac{J^A}{\beta^A}}_{\text{внешние кап. затраты (чистая)}} \quad (\beta^A > 1)$$

$\uparrow$ портится

M^A - показатель износостойкости износа

Еще есть моральное старение. Его тоже нужно учитывать (амортизация)

$$Y_i^A = C_i^A + J_i^A + \sum_{\substack{B \neq A \\ B \neq A}} X_i^{AB} \quad - \text{уравнение баланса с/з стабильного предприятия}$$

Утобы вывести на макроуровне, или лучше перейти к финансовым эквивалентам

$$X_i^{AB}(t) \sim \varphi_i^{BA}(t) - \text{математика}$$

(потому товаров сразу! идет поток математики)

$$X_i^A \sim \tilde{X}_i^A ; Y_i^A \sim \tilde{Y}_i^A$$

$$V_i^A \sim \tilde{V}_i^A ; J_i^A \sim \tilde{J}_i^A$$

$$C_i^A \sim \tilde{C}_i^A$$

X_i^{AB} - A передает товар B

φ^{BA} - B передает деньги A

$$\tilde{Y}_P^A = \underbrace{\tilde{C}_P^A}_{\text{добавленная стоимость}} + \underbrace{\tilde{J}_P^A}_{\text{потребление}} + \sum_{\substack{B \neq A \\ B \neq A}} \underbrace{\varphi_P^{BA}(t)}_{\text{математика в пр-во}}$$

$\tilde{X}_P^A$ - деньги произв-ва

$\tilde{V}_P^A$ - материальные затраты

$$\mu^A \sim \tilde{\mu}^A$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mu}^A}{dt} = \tilde{J}_P^A - \mu^* \tilde{K}^A}$$

апортующие

$\exists N \in \mathcal{I}$ - подмножество элементов из-за

$$\tilde{Y}_P^N + \tilde{I}_P^N = \tilde{C}_P^N + \tilde{J}_P^N + \tilde{E}_P^N$$

ВВП

экспорт (плата за товар за границу)

капитализация

↑ основное макро-е потребление или макроэконом. баланс

Искусственный (P)

$a \in P$ - искусственно

Заменим: L^a - число искусственных а

искусственно: γ^a - процент от а

генотип: φ_{γ}^{Ta} - генотип от прогаметов

ген. масса: $\varphi_L^{aH} = S L^a$

известный: $\varphi_s^{aT} = p S^a$

S - масса з/н, p - цена на прогамет

Функциональный баланс, прогамет-дг

$$\frac{dN^a}{dt} = \varphi_{\gamma}^{Ta} - \varphi_s^{aT} - \varphi_L^{aH} - T^{aH} - T^{ag} + \text{губительные потери}$$

(процент от з/н)
искусственно
искусственно

$$+ \frac{dL^{aH}}{dt}$$

генотип от
прогаметов

$$- \frac{dL^{aB}}{dt} - R^{aB}$$

известный
(процент от з/н)
% по прогамету

$$\gamma = \sum_{a \in P} \gamma^a \quad L = \sum_{a \in P} L^a$$

это - процент
искусственно

процент
от з/н
искусственно

Дан. хозяйство (H)

$a \in H$

научаем: c^a

масса

$\varphi_c^{aT} = p c^a$ (компенсирующее растение)

$\sum_{a \in H} c^a = C$ - все, что компенсирует дан. хоз-во

з/н:

$$\varphi_L^{Pa} = S L^a$$

$$\sum_{a \in H} L^a = \sum_{a \in P} L^a$$

- все растение на прогамет-е

Баланс:

привнес
искусственно
генет

$$\frac{dN^a}{dt} = \varphi_L^{Pa} - \varphi_c^{aT} + T^{Ba} + T^{Pa} - T^{ag} + T^{ga}$$

з/н на
искусственно

компенсирующее
растение

губительные
генотип от

искусственно
з/н
искусственно
искусственно

$$- \frac{dL^{aB}}{dt} + R^{Ba}$$

генотип,
привнес
искусственно

искусственно
масса прогаметов

Tougarombo

$$\frac{dN_g}{dt} = - \varphi_g^T + T_{Bg} + T_{Pg} + T_{Hg} + T_{Cg} - T_{Hg} + \frac{dL_{cg}}{dt} - R_{gc}$$

$\frac{dN_g}{dt}$ — изменение массовых остатков
 φ_g^T — масса испаряющегося газа
 T_{Bg} — масса газа, поступающего из Б
 T_{Pg} — масса газа, поступающего из П
 T_{Hg} — масса газа, поступающего из Н
 T_{Cg} — масса газа, поступающего из С
 T_{Hg} — масса газа, поступающего из Н
 $\frac{dL_{cg}}{dt}$ — изменение массы газа в газопроводе
 R_{gc} — масса газа, поступающего из С

Камни. Сани

$a \in B$ - агент и нац. банк - тор. лицо с нах-ся в деятельности агентов из мн-ва фирм их коэф-ств и функционирования исключительно фирмам. опер-ми.

В организационном плане КБ входят результаты операций кредитования производителей, ведения расчетов с сетью производителей и торговцев, заимствования у населения и

$$\begin{aligned} \text{У.Б:} \quad \frac{dN^A}{dt} &= -T \Delta H - T \Delta g - \frac{dL^{AP}}{dt} + \frac{dL^{Pg}}{dt} + \frac{dL^{H_A}}{dt} - \frac{dL^{AB}}{dt} + \frac{dL^{P_A}}{dt} + \\ &+ \frac{dL^{CA}}{dt} - \frac{dL^{AC}}{dt} + R^{PA} - R^{AH} - (R^{BA} - R^{AB}) - R^{AC} \end{aligned}$$

↑ $\frac{dL^{CA}}{dt}$ — прирост ссуд от УБ
 ↑ $\frac{dL^{AC}}{dt}$ — прирост резервов в УБ
 ↑ R^{PA} — % наращения от прироста
 ↑ R^{AH} — % наращения по валютным ас.
 ↑ $(R^{BA} - R^{AB})$ — % наращения по ссудам УБ
 ↑ R^{AC} — % прироста ссуд от других банков

—————
 % У.Б. группы банков

⑥ Динамич. метотраслевые модели. понятия траекторий, этап. траект., динам. равн.

A - тех. затраты

n отраслей

z_j - произв. мощность j -й отр. (цм. по всем предпр.)

η_j - приращ. мощностей

$\eta_j (d_{1j}, \dots, d_{nj})$ - затраты на увелич. мощн на j

$P = (P_1, \dots, P_n)$ - труд ресурсы.

L - общ. кол-во занятых в эк-ке.

$c = (c_1, \dots, c_n)$ - вектор перем. на ~~одн.~~ одного работника

$t = 1, \dots, T$ - дискр. в $[t-1, t]$ происх. манипуляций

$$\begin{cases} \overbrace{Ax(t)}^{\text{тех. затр.}} + \overbrace{D\eta(t)}^{\text{кан. затр.}} + \overbrace{L(t)c}^{\text{опл. труд}} \leq x(t) & \text{огр. пр-ва.} \\ x(t) \leq z(t-1) & \text{мощн.} \\ z(t) \leq z(t-1) + \eta(t) & \text{повыш. мощн. возм. на основе имеющихся с учетом техн. прогресса.} \\ \langle P, x(t) \rangle \leq L(t) & \text{труд. рес-сы отр.} \\ (x(t), \eta(t), z(t), L(t)) \geq \theta & \text{границ. опр. измен.} \\ z(0) & \text{известно, опре. общ. произв. мощностей перед началом функционир. эк-ки} \end{cases}$$

Недостатки:

- нет уменьш. мощн. во времени
- увелич. мощн. считаем в отч. одной единицы времени, но это может прак. дело.
- м.д. неск. траект. и ставится вопрос о $\exists$ и оптимальности.
- критериев опт-ти несколько

Рассм. конечное (терм.) сост. эк-ки $(x(T), z(T), \eta(T), L(T))$ и в кол-ве целевого ф-ла: $\langle c_1, x(T) \rangle + \langle c_2, z(T) \rangle + \langle c_3, \eta(T) \rangle + c_4 L(T)$, где c_1, c_2, c_3 - n -мерные векторы, c_4 - число.

$$\begin{cases} \max \langle \tilde{c}, \tilde{x}(T) \rangle \\ \tilde{A} \tilde{x}(t) \leq \tilde{B} \tilde{x}(t-1) \\ \tilde{x}(t) \geq 0, t=1, \dots, T \\ \tilde{x}(0) = (0, 0, z(0), 0) - \text{задано} \end{cases} \quad (*) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A-E & 0 & 0 & c \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -E & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{x} = (x, z, \eta, L)$, $\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$
компл. траект. компл. ф-ция

(*) по внеш. виду напоминает модель Неймана. Однако $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не удовл. усл., наклад. на A и B модели Неймана: они могут иметь отриц. эл-ты и в них $\exists$ нулевые ^{своя} _{и общие}.

⑥ прояснение

Модель Неймана:

$(a^j, b^j), j = \overline{1, m}$ - набор произв. процессов

$a^j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ - затраты

$b_j = (b_{1j}, \dots, b_{nj})$ - выпуск.

$b_j, a_j \geq 0$ при единич. интенсивн.

(A, B) - технология, x - вектор интенсивн.

$$C = \{(y, z) \mid \exists x \geq 0: y = Ax, z = Bx\}$$

вектор
затрат

вектор
выпуска

$T: [t, t+1]$ - траект. то, что произв. в $[t-1, t]$.

$Bx(t-1)$ - было выпущено в $[t-1, t]$.

$$(1) Ax(t) \leq Bx(t-1)$$

$Bx(0)$ - задано, $\{x(t)\}$ - тр. интенсивн.

цены: $p_i(t-1)$ действ. на $[t-1, t]$

ропор: $\langle p(t), b_j \rangle - \langle p(t-1), a_j \rangle$ - ропор прироста (a_j, b_j)

(2) правило нулевого ропора:

$\{p(t)\}$ - траект. цен.

$$p(t-1)A \geq p(t)B$$

сопр. эквит. массы: $\begin{cases} p(t-1)Ax(t) = p(t)Bx(t) \\ p(t)Ax(t) = p(t)Bx(t-1) \end{cases}$

(1), (2) - модель Неймана

~~Определение~~ (6) продолжение еще одно.

Опр. Тр. $\{x(t)\}$ - станд., если $\exists \gamma > 0: x(t) = \gamma x(t-1)$
($x(t) = \gamma^t x(0)$)

$$\{x(t)\} = \{\gamma^t x(0)\} \text{ - станд. } \Leftrightarrow \gamma Ax \leq Bx$$

Опр. Тр. $\{p(t)\}$ - станд., если $\exists \mu > 0: \mu p(t) = p(t-1)$
($p(t) = \mu^{-t} p(0)$)

$$\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p(0)\} \text{ - станд. } \Leftrightarrow \mu pA \geq pB$$

Для станд. тр. инвент. и цен сохр. денежной массы:

$$\mu pAx = pBx$$

$$\gamma pAx = pBx$$

Опр. Мод. Нейм. нах. в экот. дин. равн.

$(\gamma, \mu, x, p), \gamma > 0, \mu > 0, x, p$ - неотриц. величины, если

$$\gamma Ax \leq Bx$$

$$\mu pA \geq pB$$

$$\mu pAx = pBx$$

$$\gamma pAx = pBx$$

$\mu \equiv \gamma \stackrel{\text{def}}{=} 1$ - темп роста инвентивн пр-ва
совпадает с темпом падения
цен.

6. Динамические нестационарные модели. Показатели траектории, инт-ой траектории, динамического равновесия.

Дин. нест. мод.

A - технологические затраты,

h - отходы,

ξ_j - производственная мощность j-й отрасли (суммарная по всем предприятиям)

η_j - приращение мощностей

$\eta_j(d_{1j}, \dots, d_{nj})$ - затраты на увеличение мощностей на η_j

$l = (l_1, \dots, l_n)$ - трудовые ресурсы

L - общее количество занятых в экономике

C = (c_1, \dots, c_n) - вектор потребления на 1-ю рабочую

Время дискретно: $t=1, \dots, T$; в $[t-1, t]$ - происходит наращивание мощностей
 $\delta A x(t)$ - изменение затрат
 $+ D \eta(t)$ - затраты на прирост мощностей
 $+ L(t) C$ - затраты на оплату труда
 $\leq x(t)$ - спрос на произв. в отрасли и отрасли
 $x(t) \leq \xi_j(t-1)$ - если производства не превышает мощности
 $\xi_j(t) \leq \xi_j(t-1) + \eta_j(t)$ - новые мощности не могут превышать существующих с учетом прироста
 $\langle l, x(t) \rangle \leq L(t)$ - трудовые ресурсы ограничены

$(x(t), \eta(t), \xi(t), L(t)) \geq \theta$ - траектория определяет изменение перед началом ср-ия мощностей

$\xi_j(\theta)$ - известно, определяет общие производ-ые мощности

Недостатки:

- не учитываются мощности по времени (можно добавить мощности)
- увеличение мощностей требует в течение одной единицы времени, но это может происходить долго
- м.б. несбалансированность траекторий и ставится вопрос о Э и оптимальности
- критериев оптимальности несбалансированности

Рассмотрим линейные (линейные) значения функции
 $(x(t), \xi(t), y(t), L(t))$ и в качестве целевого функционала
 возьмем:

$$\langle c_1, x(t) \rangle + \langle c_2, \xi(t) \rangle + \langle c_3, y(t) \rangle + c_4 L(t),$$

где c_1, c_2, c_3 - n -мерные векторы, c_4 - число

$$\begin{cases} \max \langle \tilde{c}, x(t) \rangle \\ \tilde{A} x(t) \leq \tilde{B} x(t-1) \\ x(t) \geq 0, t=1, 2, \dots, T \\ x(0) = (0, 0, \xi(0), 0) - \text{задано} \end{cases} \quad (*)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A-E & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & -E & 0 \\ I & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = (x, \xi, y, L)$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$
 компоненты векторов компоненты
~~целевой функции~~ целевой функции

~~Решение задачи~~

(*) по внешнему виду напоминает модель Кэймана. Однако матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не удовлетворяют условиям, наложенным на A и B модели Кэймана: они могут иметь отрицательные элементы и быть не квадратными.

Модель Кэймана
 (a^j, b^j) , $j = \overline{1, m}$ - набор произвольных процессов
 $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$ - затраты; $b^j = (b_1^j, \dots, b_n^j)$ - выигрыши, $b_j, a_j \geq 0$ при единичной интенсивности
 (A, B) - матрицы, x - вектор интенсивности
 $C = \{(y, z) \mid \exists x \geq 0 : y = Ax, z = Bx\}$
 $\uparrow$ вектор затрат вектор выигрыша

$T: [t, t+1]$ - промежуток, что требуется в период $[t+1, t]$
 $Bx(t-1)$ - было выиграно в $[t-1, t]$

$$(1) Ax(t) \leq Bx(t-1)$$

$Bx(0)$ - задано; $\{x(t)\}$ - м-я интенсивности

цели: $p_i(t-1)$ действие на $[t-1, t]$

голог: $\langle p(t), b_j \rangle - \langle p(t-1), a_j \rangle$ - гогол процесса (a_j, b_j)

(2) Правило ценового спроса
 $p(t-1) A \geq p(t) B$
 сохранение денежной массы : $\{p(t)\}$ - траектория цен
 $\begin{cases} p(t-1) A x(t) = p(t) B x(t) \\ p(t) A x(t) = p(t) B x(t-1) \end{cases}$

(1) и (2) - модель кейнса

Отв. Траектория $\{x(t)\}$ - по-прежнему стационарной, если $\exists \vartheta > 0: x(t) = \vartheta x(t-1)$
 (или $x(t) = \vartheta^t x(0)$)

$\{x(t)\} = \{\vartheta^t x(0)\}$ - стационарна $\Leftrightarrow \vartheta A x \leq B x$

Отв. Траектория $\{p(t)\}$ - стационарна, если $\exists \mu > 0: \mu p(t) = p(t-1)$
 ($p(t) = \mu^t p(0)$)

$\{p(t)\} = \{\mu^t p(0)\}$ - стационарна $\Leftrightarrow \mu p A \geq p B$

Для стационар. траекторий монетизированности и цен
 сохран. денежной массы : $\mu p A x = p B x$
 $\vartheta p A x = p B x$

Отв. М. Кейнса нах-ся в соот. с м. равновесия,
 (ϑ, μ, x, p) $\vartheta > 0, \mu > 0, x, p$ - неотриц. вел-ны, если
 $\vartheta A x \leq B x; \mu p A \geq p B; \mu p A x = p B x; \vartheta p A x = p B x$

$\mu = \vartheta \frac{\det A}{\det B}$ - не имеет роста мон-ти произв-ва и продаж
 "м. Кейнса" ~~представляет~~ цен совпадения

Путь к м. Кейнса - опред-ся нах-ие равн-ия в м. Кейнса,
 где

$$\begin{cases} \vartheta A x \leq B x \\ \vartheta p A \geq p B \\ p A x > 0 \end{cases}$$

м. кейнса : $\begin{cases} \max_{t \in [0, T]} c(x(t)) > \\ A x(t) \leq B x(t-1), t = 1, T \end{cases}$

- ⑦ Модель Вальраша. Модель дин. равновесия вальраша,
 $\exists$ равновес. грани.

Мод. Вальраша:

Децентрализ. эк-на
~~состоит~~ 2 сектора: произв. и потребит.

Формальное описание:

с потреб., m произв. и n типов товаров.

потреб. i : $K_i(p)$ - ф. дохода

$\Phi_i(p)$ - ф. спроса.

$$K_i(p) = \underbrace{\langle v^i, p \rangle}_{\substack{\text{продажа} \\ \text{из запаса} \\ \text{товара } v^i}} + \underbrace{I_i(p)}_{\substack{\text{чек} \\ \text{дон} \\ \text{донор}}}$$

произв. k :

$$(x, y) \in \Gamma$$

произв. процессе

прибыль от произв. процесса: $\langle y - x, p \rangle$

$$\underbrace{\langle y - x, p \rangle}_{\substack{\text{чистый} \\ \text{выпуск} \\ \text{пр-ва}}} = \max_{(x', y') \in \Gamma} \langle y' - x', p \rangle$$

$y^k = F(x^k)$ - объем производства

$$Y^k = \{y^k - x^k \mid x^k \in \mathbb{R}_+^n, y^k = F(x^k)\}$$

технол. мн-во, компания.

Ψ_k - ф. предложения (опт. произв. процесс)

$$\Psi(p) = \{y \in Y \mid \langle y, p \rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p \rangle\}$$

втерминах чистых выпусков

$$Y = \sum_{k=1}^m Y_k \text{ - совокуп. технол. мн-во}$$

$$\Psi_0(p) = \sum_{k=1}^m \Psi_k(p) \text{ - ф. совокуп. предложения.}$$

$$\bar{\Psi}_0(p) = \{y \in Y \mid \langle y, p \rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p \rangle\} \text{ - мнот. произв. процессов, от с.з. всего произв. сектора}$$

Тогда произв. процессы, опт. с т.з. всего произв. сектора, опт. и с т.з. нац. произв-ва, и наоборот: $\bar{\Psi}_0(p) = \sum_{k=1}^m \Psi_k(p) = \Psi_0(p)$

Дифференциал. З. Вальораса: $\langle p, x \rangle \leq \langle p, y \rangle, x \in \Phi(p), y \in \Psi(p)$
 (в шир смысле) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow x \in \Phi(p) \Rightarrow y \in \Phi(p)$

Опр. Набор $(y_1^*, \dots, y_m^*; x_1^*, \dots, x_l^*; p^*)$ неогр. векторов назыв. конкур. равновесием, если:

$$y_k^* \in \Psi_k(p^*), k = \overline{1, m}$$

$$x_i^* \in \Phi_i(p^*), i = \overline{1, l}$$

и выполн. экон. баланса спроса и предлож.

$$\sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^l v_i^* \geq \sum_{i=1}^l x_i^* \quad (\text{предл.} \geq \text{спросу})$$

$$\langle p^*, \sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^l v_i^* \rangle = \langle p^*, \sum_{i=1}^l x_i^* \rangle \quad (\text{сб. сб.} = \text{сб. сб.} = \text{предл.})$$

Опр. Вектор p^* наз. вектором равновесных цен, $\Phi(p) = \sum_{i=1}^l \Phi_i(p)$ - ф. совокуп. спроса.

$$\Psi(p) = v + \sum_{k=1}^m \Psi_k(p), v = \sum_{i=1}^l v_i^* \quad \text{ф. совокуп. предл.}$$

Опр. Набор (y^*, x^*, p^*) назыв. конкур. равн., если $x^* \in \Phi(p^*), y^* \in \Psi(p^*), x^* \leq y^*, \langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$

Модель дин. равн. (модель м. Вальораса).

И типов товаров, время: периоды $[0; +1], \dots, [t; t+1], \dots$

Пр-во: $Z_t \subset \mathbb{R}_+^{2n}$ - техн. (все произв. возм. в $[t; t+1]$)
 мн-во

$(x, y) \in Z_t$ - техн. процесс

мат. вектор
закуп. произв.

Потреб! $\Phi_t = \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ - ф. совокуп. спроса, ставит в

соотв. каждому вектору цен $p_i \in \mathbb{R}_+^n [t; t+1]$ мн-во $\Phi_i(p_i) \in \mathbb{R}_+^n$

наиболее
предпочт.
набор
продуктов

Х произв. затрат приобр. по ценам p_t периоде $[t; t+1]$,
 а произв. продукция продается по ценам p_{t+1} след. период.

$\Rightarrow$ прибыль техн. процесса: $\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle$

В соотв. с концепцией одуло равн. каждый уч-к действ. согласно своим интересам, ориентируясь только на цены текущего периода.

⑦ Продолжение еще одно.

Опр. Пози-ть векторов: $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}, t=0, T$ назыв. (конечной) равновесной тр. с началом y_0 , если

$$1) c_t \in \Phi_t(p_t), t=0, \dots, T$$

$$2) (x_t, y_{t+1}) \in Z_t, t=0, \dots, T-1$$

$$3) \langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle \geq \langle p_{t+1}, y_{t+1}^1 \rangle - \langle p_t, x_t^1 \rangle$$

для $\forall (x_t^1, y_{t+1}^1) \in Z_t, t=0, \dots, T-1$

$$4) c_t \leq y_t - x_t, t=0, \dots, T \text{ (отсутствие дефицита товара)}$$

$$5) \langle p_t, c_t \rangle = \langle p_t, y_t - x_t \rangle, t=0, \dots, T \text{ (аналог закона Вольфганга)}$$

$$6) \langle p_T, x_T \rangle = 0$$

Сделаем следующие предположения.

1) $\Phi_t(p)$ опр. при $\forall p \in R_+^n$ и полуконв. сверху,

$\Phi_t(p)$ выпуклы при $\forall p$ и опр. в совокупн. при $p \in R_+^n$.

2) $\exists \beta > 0: \langle p, c \rangle \leq \beta$ выполн. при всех $p \in R_+^n$ и $c \in \Phi_t(p)$

3) Z_t замкн. и выпн. в R_+^{2n} , $(0, 0) \in Z_t$, $t=0, 1, \dots$
 Z_t - опр. в совокупн. при $t=0, 1, 2, \dots$

4) $\exists$ пози-ть $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Z_t, t=0, 1, 2, \dots$, для которых
 $\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \geq \tilde{z} > 0$, где $\tilde{z}$ - фикс. вектор, $t=1, 2, \dots$

$$5) y_0 > 0$$

Теорема. При выпн. усл. 1-5 для $\forall$ конеч. T
 $\exists$ равновес. траект. с началом y_0

Теор. При выпн. усл. 1-5 $\exists$ бесконечные
 равновесные траектории $\forall y_0 > 0$.

Билет 10

линейной

Модель парной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

1. Рассматривается набор двух переменных $X_t, Y_t, t=1, \dots, n$.
Задача: подобрать $f(X, \beta)$ так, чтобы она "наилучшим" образом описывала ~~зависимость~~ зависимость Y от X .

Для линейного случая: $f(X, \beta) = \alpha + \beta X$ - модель парной линейной регрессии.
2. Метод наименьших квадратов (МНК)
В МНК рассматривается функционал: $H = \sum_{t=1}^n (Y_t - (\alpha + \beta X_t))^2$,
который необходимо минимизировать для "наилучшей" аппроксимации набора наблюдений $X_t, Y_t, t=1, \dots, n$,
линейной функцией $f(x) = \alpha + \beta x$.

Найдя экстремумы по α и β функционала H , мы получим требуемые оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ для $f(X)$:

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum X_t Y_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Ковариация } X, Y \\ \text{Дисперсия } X \end{array}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum Y_t - \frac{1}{n} \sum X_t \hat{\beta} = \bar{Y} - \bar{X} \hat{\beta}$$

Уравнение в отклонениях: пусть $x_t = X_t - \bar{X}$, $y_t = Y_t - \bar{Y}$.
Задача: подобрать $f(x) = \alpha + \beta x$, минимиз. функционал: $H = \sum_{t=1}^n (y_t - (\alpha + \beta x_t))^2$.
Решением будет та же прямая на плоскости (x, y) , что и для исходных данных X_t, Y_t , т.к. переход к отклонениям означает лишь перенос координат в точку $(\bar{X}, \bar{Y})$.

$$\hat{\alpha} = 0, \quad \hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

1. $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, t=1, \dots, n$ - это спецификация модели

2. X_t - это детерминированная величина; вектор $(X_1, \dots, X_n)'$ не коллинеарен вектору $i = (1, \dots, 1)'$

3а. $E \varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ - не зависит от t .

3б. $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, некоррелированные ошибки для разных наблюдений.

Часто также добавл. условие:

Зв. Ошибки ε_t , $t=1, \dots, n$, имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Опр. 1. Гомоскедастичностью назыв. условие независимости дисперсии ошибки от номера наблюдения:

$$E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2, t = \overline{1, n}$$

Гетероскедастичность - это обратное явление: $V(\varepsilon_t) \sim \chi_t^2$

Теорема Гаусса - Маркова: В предположениях модели 1-Заб:

$$1. Y_t = a + b X_t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n;$$

2. X_t - гетери. величина;

$$3a. E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2;$$

$$3б. E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, t \neq s$$

оценки $\hat{a}, \hat{b}$ полученные по методу МНК имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок.

$$\varepsilon_t - \text{остатки регрессии: } Y_t = \hat{Y}_t + e_t = \hat{a} + \hat{b}X_t + e_t$$

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2 - \text{оценка дисперсии ошибок.}$$

↑ это не ε_t
 e_t они подмодель

Оценка дисперсий $\hat{a}$ и $\hat{b}$:

$$\hat{V}(\hat{b}) = S^2 \frac{1}{\sum x_t^2} = \frac{S^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

$$\hat{V}(\hat{a}) = S^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2} = \frac{S^2 \sum X_t^2}{n \sum (X_t - \bar{X})^2}$$

$$\hat{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{\bar{X}}{\sum X_t^2} S^2 = -\frac{\bar{X} S^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

Билет № 11

Всего

Модель множественной регрессии Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова

1.
$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}$$

или
$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}$$

где x_{tr} - значения регрессора x_r в наблюдении t , а $x_{t1} = 1$
Модель назыв. нормальной линейной регрессией, если выполнен:

1) $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}$ - стандартная модель

2) $x_{t1}, \dots, x_{tk}$ - детерминир. величины. Векторы $x_s = (x_{s1}, \dots, x_{sk})$
 $s = \overline{1, \dots, k}$ линейно независимы в $\mathbb{R}^n$

3а) $E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ - не зависит от t .

3б) $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ - статистическая независимость ошибок для разных наблюдений.

3в) Ошибки $\varepsilon_t, t = \overline{1, n}$ имеют совместное норм. распредел.
 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

2. Метод наименьших квадратов

$$e = y - \hat{y} = y - X \hat{\beta}$$
 - остаток регрессии

МНК заключается в следующем: $ESS = \sum e_t^2 = e^T e \rightarrow \min$

Из $\frac{\partial ESS}{\partial \hat{\beta}} = 0$ получаем: $\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T y$

Получая в дальнейшем формулу $e^T e = y^T y - \hat{\beta}^T X^T y$

Теорема Гаусса-Маркова. Предположим, что

1. $y = X\beta + \varepsilon$;

2. X - детерминир. $n \times k$ матрица, имеющая макс. ранг k ;

3. $E(\varepsilon) = 0$; $V(\varepsilon) = E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma^2 I_n$

Тогда оценка МНК $\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T y$ явл. наиболее эффектив. (в смысле наименьшей дисперсии) в классе линейных (по y) несмещенных оценок.

Билет 12

Понятие временного ряда. Понятие строго стационарного временного ряда. Условия стационарности временного ряда в широком смысле.

Опр. 1. $\exists t_1, t_2, \dots, t_m, \dots (t_i \leq t_{i+1} \forall i)$ - дискретные моменты времени; $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}, \dots$ случ. величины, соответствующие этим моментам времени. Последовательность $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots$ назыв. временным рядом.

$F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = P\{X_{t_1} < x_{t_1}, \dots, X_{t_n} < x_{t_n}\}$ - совместная функция распределения величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$.
 $p(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ - совместная плотность распредел. величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$.

Опр. 2.
Ряд X_t назыв. строго стационарным (стационарным в узком смысле), если совместное распределение m наблюдений $X_{t_1}, \dots, X_{t_m}$ не зависит от сдвига по времени, то ел. совпадает с распредел. $X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}$ для $\forall m, \tau, t_1, \dots, t_m$.

Опр. 3.
Ряд X_t назыв. слабостационарным (стационарным в широком смысле), если среднее, дисперсия и ковариация X_t не зависят от t : $E(X_t) = \mu < \infty$; $D(X_t) = \gamma(0)$, $\text{cov}(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$.
Из строгой стационарности следует слабая стационарность.

Опр. 4. $\rho(\tau) = \text{corr}(X_t, X_{t+\tau}) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$ кохррелирует корреляции.
 $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$

Примеры: 1) гауссовский процесс - ряд X_t с независ. одинаково распредел. наблюдениями: $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, $t = 1, 2, \dots, n$, $\rho(\tau) = 0 \forall \tau \neq 0$.
Этот ряд стационарен (в широком смысле).
2) Процесс "белого шума" - врем. ряд ε_t с независ. одинаково распредел. ~~белыми~~ наблюдениями:
 $E(\varepsilon_t) = 0$, $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $t = 1, \dots, n$, $\rho(\tau) = 0 \forall \tau \neq 0$

12. Понятие временного ряда. Понятие строго стационарного временного ряда. Условия стационарности временного ряда в широком смысле.

Временной ряд (time series) — последовательность наблюдений значений некоторой переменной, произведенных через равные промежутки времени. Если принять длину такого промежутка за единицу времени (год, квартал, день и т.п.), то можно считать, что последовательные наблюдения $x_1, \dots, x_n$ произведены в моменты $t = 1, \dots, n$.

Основная отличительная особенность статистического анализа временных рядов состоит в том, что последовательность наблюдений $x_1, \dots, x_n$ рассматривается как реализация последовательности, вообще говоря, статистически зависимых случайных величин $X_1, \dots, X_n$, имеющих некоторое совместное распределение с функцией распределения $F(v_1, v_2, \dots, v_n) = P\{X_1 < v_1, X_2 < v_2, \dots, X_n < v_n\}$.

Мы будем рассматривать в основном временные ряды, у которых совместное распределение случайных величин $X_1, \dots, X_n$ имеет совместную плотность распределения $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ряд $x_t, t = 1, \dots, n$, называется строго стационарным (или стационарным в узком смысле), если для любого $m (m < n)$ совместное распределение вероятностей случайных величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_m}$ такое же, как и для $X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}$, при любых $t_1, \dots, t_m$ и τ , таких, что $1 \leq t_1, \dots, t_m \leq n$ и $1 \leq t_1 + \tau, \dots, t_m + \tau \leq n$.

Другими словами, свойства строго стационарного временного ряда не изменяются при изменении начала отсчета времени. В частности, при $m = 1$ из предположения о строгой стационарности временного ряда x_t следует, что закон распределения вероятностей случайной величины X_t не зависит от t , а значит, не зависят от t и все его основные числовые характеристики (если, конечно, они существуют), в том числе: математическое ожидание $E(X_t) = \mu$ и дисперсия $D(X_t) = \sigma^2$.

Значение μ определяет постоянный уровень, относительно которого колеблется анализируемый временной ряд x_t , а постоянная σ характеризует размах этих колебаний. Члены временного ряда являются статистически взаимозависимыми. Степень тесноты статистической связи между случайными величинами X_t и $X_{t+\tau}$ может быть измерена парным коэффициентом корреляции.

$$Corr(X_t, X_{t+\tau}) = Cov(X_t, X_{t+\tau}) / \sqrt{D(X_t)D(X_{t+\tau})}$$

где

$$Cov(X_t, X_{t+\tau}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t+\tau} - E(X_{t+\tau}))]$$

Если ряд x_t стационарный, то значение $Cov(X_t, X_{t+\tau})$ не зависит от t и является функцией только от τ ; мы будем использовать для него обозначение $\gamma(\tau) : \gamma(\tau) = Cov(X_t, X_{t+\tau})$. В частности, $D(X_t) = Cov(X_t, X_t) \equiv \gamma(0)$. Соответственно, для стационарного ряда и значение коэффициента корреляции $Corr(X_t, X_{t+\tau})$ зависит только от τ ; мы будем использовать для него обозначение $\rho(\tau)$, так что

$$\rho(\tau) = Corr(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau) / \gamma(0).$$

В частности, $\rho(0) = 1$.

Практическая проверка строгой стационарности ряда x_t на основании наблюдения значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ в общем случае затруднительна. В связи с этим под стационарным рядом на практике часто подразумевают временной ряд x_t , у которого

- $E(X_t) \equiv \mu$,
- $D(X_t) \equiv \sigma^2$,
- $Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$ для любых t и τ .

Ряд, для которого выполнены указанные три условия, называют стационарным в широком смысле (слабо стационарным, стационарным второго порядка или ковариационно-стационарным).

Если ряд является стационарным в широком смысле, то он не обязательно является строго стационарным. В то же время, и строго стационарный ряд может не быть стационарным в широком смысле просто потому, что у него могут не существовать математическое ожидание и/или дисперсия. (В отношении последнего примером может служить случайная выборка из распределения Коши.)

Билет № 13 и билет 14 тоже тут (Вопрос Бокса-Дженкинса по ARIMA)
 Нестационарный процесс авторегрессии - интегрированного скользящего среднего ARIMA(p, d, q)
 Рассмотрим нестационарный ряд сущ. блуждающая $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

Тогда $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = Y_t = \varepsilon_t$

p-м ряд вида: $X_t = a + bt + \gamma t^2 + \varepsilon_t$

$\Delta X_t = b + 2\gamma t - \gamma + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

$\Delta^2 X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = 2\gamma + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$

Бокс и Дженкинс выделили класс нестационар. рядов ARIMA(p, d, q) который взяли d шагов. ручной приводить к стационарному (p - параметр AR-части, d - степени интеграции, q - параметр MA-части):

$$a_p(L)(1-L)^d X_t = b_q(L)\varepsilon_t$$

Если обозначить $a_p(L)(1-L)^d X_t = Y_t$, получили стат. процесс

4 этапа построения ARIMA:

- 1) Установить порядок интеграции d. После получения временного ряда, к которому нужно подобрать ARMA(p, q) исходя из автокорреляционной и частотной автокорр. ф-ций;
- 2) Оценивание $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ при известном ряду
- 3) По остаткам осуществл. тестир. модели
- 4) Использование модели для прогнозир. временного ряда.

~~Матрица~~

Опр. Авторегрессионная модель (AR): $X_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t$

Опр. Модель скользящего среднего (MA): $X_t = \sum_{j=0}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}$ здесь ε_t - белый шум.

Опр. Модель ARMA: $X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}$

Опр. Автокорреляцией назыв. показатель зависимости уровней ряда:

$$r(\tau) = \frac{\sum_{t=\tau+1}^n (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-\tau} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=\tau+1}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \sum_{t=\tau+1}^n (y_{t-\tau} - \bar{y}_2)^2}}$$

, где $\bar{y}_1 = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=\tau+1}^n y_t$ $\bar{y}_2 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=\tau+1}^n y_{t-2}$

(15) Стат. св-ва оценок по МНК пар. парной лин. регр.
~~Контроль~~

1) $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = \overline{1, n}$

2) Y_t - ген.

3) $E\varepsilon_s = 0, E\varepsilon_s^2 = D\varepsilon = \sigma^2$

$E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0 \quad \forall t \neq s$

4) $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

$$RSS = \sum_{t=1}^n (Y_t - a - bX_t)^2. \quad \frac{\partial RSS}{\partial a} = -2 \left(\sum_{t=1}^n Y_t - na - b \sum_{t=1}^n X_t \right) = 0$$
$$\frac{\partial RSS}{\partial b} = -2 \left(\sum_{t=1}^n X_t Y_t - a \sum_{t=1}^n X_t + b \sum_{t=1}^n X_t^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = \frac{\sum Y_t}{n} - \frac{\sum X_t \hat{b}}{n} \\ \hat{b} = \frac{n \sum X_t Y_t - \sum X_t \cdot \sum Y_t}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &\sim N\left(a, \frac{\sigma^2 \sum X_t^2}{n \sum (X_t - \bar{X})^2}\right) \\ \hat{b} &\sim N\left(b, \sigma^2 / \sum (X_t - \bar{X})^2\right) \end{aligned}$$

Если гипотеза
нормальности ошибок
не выполн., то $\hat{a}, \hat{b} \sim N(\dots)$
не верны.

S^2 - оценка дисперсии ошибок:

$$\frac{(n-2)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

S^2 и МНК-оценки $\hat{a}, \hat{b}$ независимы, т.к.

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2, e_t = Y_t - \hat{Y}_t \text{ и } \begin{aligned} \text{cov}(e_t, \hat{b}) &= 0 \\ \text{cov}(e_t, \hat{a}) &= 0. \end{aligned}$$

реальные ртн

Статистические св-ва оценок

1) $y_t = a + b x_t + \varepsilon_t \quad t = \overline{1, n}$

2) x_t - детерм

3a) $E \varepsilon_t = 0 \quad E(\varepsilon_t^2) = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$

3b) $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \quad \forall t \neq s$

4) $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

$\hat{a} \sim N(a; \sigma^2 \frac{\sum x_t^2}{n \sum x_t^2})$

$\hat{b} \sim N(b; \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2})$

Если 4) не верно; то $\hat{a}, \hat{b} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N$

$s^2 = \hat{\sigma}^2$ - оценка оценки дисперсии

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

s^2 и $\hat{a}, \hat{b}$ - независ.

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2$$

$$\text{Cov}(e_t, \hat{b}) = 0$$

$$\text{Cov}(e_t, \hat{a}) = 0$$

H: $b = b_0$

$$t = \frac{\hat{b} - b_0}{s} \sim t(n-2)$$

$$t = \frac{\hat{a} - a_0}{s} \sim t(n-2)$$

16) Проверка гипотезы $H_0: b = b_0$. Довод. инверв. гда корр. Коэф. гер.

$$\left. \begin{array}{l} 1. Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = \overline{1, n} \\ 2. X_t - \text{гер.} \\ 3a. E\varepsilon_t = 0, E\varepsilon_t^2 = D\varepsilon_t = \sigma^2 \\ 3b. E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, t \neq s \\ 4. \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{норм.} \\ \text{лин.} \\ \text{рег.} \\ \text{гомоск.} \end{array}$$

по МНК:

$$\hat{a} = \frac{\sum Y_t}{n} - \frac{\sum X_t}{n} \hat{b} = \bar{Y} - \bar{X} \hat{b}$$

$$\hat{b} = \frac{n \sum X_t Y_t - \sum X_t \sum Y_t}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)}$$

$$\hat{a} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2 \sum X_t^2}{n \sum (X_t - \bar{X})^2}\right), \quad \hat{b} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}\right)$$

Проверка гипотезы $H_0: b = b_0$.

$$\hat{b} - b \sim N(0, \sigma_{\hat{b}}^2), \quad \sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}, \quad x_t = X_t - \bar{X}$$

$$V(\hat{b}) = S_{\hat{b}}^2 = \frac{s^2}{\sum x_t^2} \Rightarrow \frac{\hat{b} - b}{\sigma_{\hat{b}}} \sim N(0, 1)$$

оценка
дисперсии $\hat{b}$

Т.к. $\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$, то $\frac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{1}{n-2} \chi^2(n-2)}$

т.е. по опр. стат. Водородова имеем:

$$t = \frac{(\hat{b} - b) / \sigma_{\hat{b}}}{s / \sigma} \sim t(n-2)$$

и т.к. $\sigma_{\hat{b}} / \sigma = S_{\hat{b}} / s$, получаем $t = \frac{\hat{b} - b}{S_{\hat{b}}} \sim t(n-2) (*)$

Аналогично $t = \frac{\hat{a} - a}{S_{\hat{a}}} \sim t(n-2)$

Стат. (*) можно использовать для проверки $H_0: b = b_0$

16) продолж.

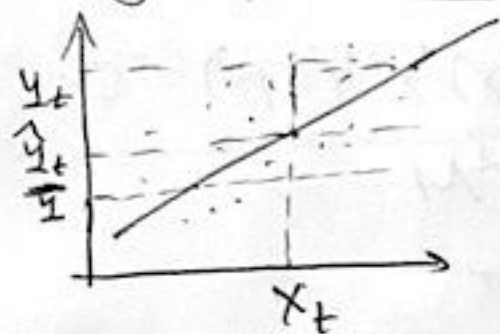
Но верно, тогда $t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}}$ ~ $t(n-2)$

Напримем при $|t| \leq t_c$ - т. t -распр. с $(n-2)$ степен. свободы.
при ур. знач. α

$$P\{\hat{\beta} - t_c s_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + t_c s_{\hat{\beta}}\} = 1 - \alpha$$

$[\hat{\beta} - t_c s_{\hat{\beta}}; \hat{\beta} + t_c s_{\hat{\beta}}]$ - $100(1-\alpha)\%$ довер. интервал

Коэф. детерминации:



$$\begin{aligned} \sum (y_t - \bar{y})^2 &= \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 + \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2 + \\ &+ 2 \sum (y_t - \hat{y}_t)(\hat{y}_t - \bar{y}) \\ &= 0, \text{ т.к. } y - \hat{y} = e, \\ &\text{вектор ост. регр.} \\ &\text{ортогонален конст. } \bar{y} \text{ и } x. \end{aligned}$$

необъясн. ESS - error
объясн. RSS - regression

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

регр. ничего не дает
точная подгонка

	M	T	W	T	F	S	S
18	1	2	3	4	5	6	7
19	8	9	10	11	12	13	14
20	15	16	17	18	19	20	21
21	22	23	24	25	26	27	28
22	29	30	31				

15 Неделя
Week

Апрель
April
Четверг
Thursday

13

①

$$\begin{aligned} \text{cov}(\epsilon_t, \hat{\beta}) &= 0 \\ \text{cov}(\epsilon_t, \hat{\alpha}) &= 0 \end{aligned}$$

— D-то гома

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \epsilon_t \quad t = \overline{1, n}$$

$$H: \beta = \beta_0$$

t статистика

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2) \quad \text{— стьюдент}$$

— правый знак

$$t = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2)$$

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n e_i^2$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

ОСТАТКИ

$$k = 5 \times$$

Гипотеза!

$$|t| \rightarrow t_{\alpha}(n-2)$$

— отбрасываем

гов. интервал! $P(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2) < \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)) = 1 - \alpha$

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \frac{s^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{var}(\hat{\alpha}) = \frac{s^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

②

	п	в	с	ч	п	с	в
13							
14	3	4	5	6	7	1	2
15	10	11	12	13	14	15	16
16	17	18	19	20	21	22	23
17	24	25	26	27	28	29	30

⌚

Корр. get. R^2

$$b \in [\hat{b} - t_{\alpha}(1-\alpha)se, \hat{b} + t_{\alpha}(1-\alpha)se]$$

$$\sum_t (y_t - \bar{y})^2 = \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2 + \sum_t (\hat{y}_t - \bar{y})^2 + 2 \sum_t (y_t - \hat{y}_t)(\hat{y}_t - \bar{y})$$

$$\hat{y}_t = a + b x_t$$

$$\sum e_t (\hat{y}_t - \bar{y}) = 0$$

$$= \sum e_t (\hat{y}_t - \bar{y}) =$$

$$= \sum e_t (\hat{a} + \hat{b} x_t - \bar{y})$$

(фото)

$$\sum (y_t - \bar{y})^2 = \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 + \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2$$

TSS

ESS

RSS

необъясним
(случ. 2 квадр.)

(объясним)

$$\bar{y} = \bar{y}$$

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

$$R^2 = 0 \quad \hat{y}_t = \bar{y}$$

17) Связ. св-ва оценок по МНК пар. лнот. рег. ~~Класс~~
 R^2 и R^2_{adj}

$$y = X\beta + \varepsilon \quad N$$

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y = Ny$$

$$e = y - \hat{y} = (\underbrace{I - X(X'X)^{-1}X'}_M)y = My, \quad M = I - N$$

$$\begin{aligned} N^2 &= N & N' &= N & NX &= X \\ M^2 &= M & M' &= M & MX &= 0 \end{aligned}$$

$$E(e) = E(My) = MEy = MX\beta = (I - X(X'X)^{-1}X')(X\beta) = 0$$

$$V(e) = V(My) = MVyM' = M\sigma^2IM' = \sigma^2M$$

$$\sum e_t^2 = e'e - \text{ест. кандидата на оценку } \sigma^2$$

$$E(e'e) = \text{tr}(V(e)) = \sigma^2 \text{tr}(M) = \sigma^2 \text{tr}(I_n - N) = \sigma^2(n - k)$$

$$\Rightarrow s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-k} = \frac{\sum e_t^2}{n-k} \quad \begin{aligned} &\text{— наимен.} \\ &\text{оценка дисп. ошибок, т.е.} \\ &Es^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

$$(n-k) \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$$

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

$R^2 = 0 \Rightarrow$ регр. у на $x_1, \dots, x_k$
 не улучшает кот-ва
 предсказ. y_t по ср. с
 трив. предсказ. $y_t = \bar{y}$

$R^2 = 1 \Rightarrow$ точная регрессия ($e_t = 0$)

$$\|y - \bar{y}i\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 + \|\hat{y} - \bar{y}i\|^2$$

TSS
ESS
RSS

$$i = (1, \dots, 1)'$$

$$y_* = y - \bar{y}i, \quad \hat{y}_* = \hat{y} - \bar{y}i$$

$$\Rightarrow y_*'y_* = e'e + \hat{y}_*'\hat{y}_*$$

1. $R^2 \uparrow$ при добавлении регрессоров

2. R^2 измен. даже при простейшем преобр. зависимой пер.,
 поэтому сравн. по знат. R^2 можно только регр.
 с одинак. зависимыми пер.

17) Профитение

$$\Rightarrow \text{коэффициент } R_{adj}^2 = 1 - \frac{e'e/(n-k)}{y'y/(n-1)}$$

$$1) R_{adj}^2 = 1 - (1-R^2) \frac{n-1}{n-k}$$

$$2) R^2 \geq R_{adj}^2, k > 1$$

$$3) R_{adj}^2 \leq 1, \text{ но может быть } < 0.$$

В определенной степени использ. R_{adj}^2 более корректно для сравн. регр. при изм. кол-ва регрессоров.

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{e^T e}{n-k} = \frac{\sum e_i^2}{n-k} - \text{несмещ. оценка дисперсии}$$

ошибок e^2 , т.е. $E S^2 = \sigma^2$ [5] (важна свойство МНК-оценок)

Т.к. (4*): $e = My = M(X\beta + \varepsilon) = M\varepsilon$ (6*)

и $\text{rank}(M) = \text{rank}(I - N) = \text{tr}(I - N) = n - k$:

$$\frac{e^T e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k) \text{ или } (n-k) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$$

Независимость $\hat{\beta}$ и S^2

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X^T X)^{-1} X^T (X\beta + \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon = \beta + A\varepsilon \quad (7*)$$

Из (6*) и (7*) видно, что $\hat{\beta}$ и e имеют совместное нормальное распределение $\Rightarrow$ дост. проверить

независ. некоррелир.: $AM = (X^T X)^{-1} X^T (I - X(X^T X)^{-1} X^T) =$
 $= (X^T X)^{-1} X^T - (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} X^T = 0$

поэтому: $\text{Cov}(\hat{\beta}, e) = E((\hat{\beta} - \beta)e^T) = E(Aee^T M) = \sigma^2 AM = 0$

Т.к. S^2 ун. функцией от e , то оценки $\hat{\beta}$ и S^2 независимы. ч.т.д.

б) скорректированный коэффициент детерминации

$$\sum (y_t - \bar{y})^2 = \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 + \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2 + 2 \sum (y_t - \hat{y}_t)(\hat{y}_t - \bar{y})$$

или в векторной форме:

$$(7^*) \quad (y - \bar{y}i)^T (y - \bar{y}i) = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) + (\hat{y} - \bar{y}i)^T (\hat{y} - \bar{y}i) + 2(y - \hat{y})^T (\hat{y} - \bar{y}i)$$

Третье слагаемое в $(7^*) = 0$ в случае, если константа, т.е. вектор $i = (1, \dots, 1)^T$, принадлежит линейной оболочке векторов $x_1, \dots, x_k$. В самом деле:

$$(y - \hat{y})^T (\hat{y} - \bar{y}i) = e^T (X\hat{\beta} - \bar{y}i) = e^T X\hat{\beta} - \bar{y}e^T i = 0$$

т.к. в силу $e^T X = 0$ и $\bar{e} = e^T i / n = 0$.

Поэтому верно равенство: $\|y - \bar{y}i\|_{TSS}^2 = \|y - \hat{y}\|_{ESS}^2 + \|\hat{y} - \bar{y}i\|_{RSS}^2$

З $y_* = y - \bar{y}i$; $\hat{y}_* = \hat{y} - \bar{y}i$

По теореме Пифагора: $y_*^T y_* = e^T e + \hat{y}_*^T \hat{y}_*$

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{e^T e}{y_*^T y_*} = \frac{\hat{y}_*^T \hat{y}_*}{y_*^T y_*} = \frac{RSS}{TSS}$$

R^2 — опред. корректно только в том случае, если константа, т.е. вектор $i = (1, \dots, 1)^T$ принадлежит линейной оболочке векторов $x_1, \dots, x_k$.

Скорректированный R^2 назыв: $R_{adj}^2 = 1 - \frac{e^T e / (n-k)}{y_*^T y_* / (n-1)}$

Свойства скорректированного R^2 :

1. $R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-k)}$

2. $R^2 \geq R_{adj}^2, k > 1$.

3. $R_{adj}^2 \leq 1$, но может принимать значения < 0

Вопрос N18

Суперкомпьютерное моделирование турбулентных течений.

From IM with love

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \nu \Delta \vec{v} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{v} - \text{скорость течения} \\ p - \text{давление} \end{array} \right\} \text{неизвестные}$$

После безразмеривания получаем систему:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \operatorname{grad} p = \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} \end{cases} \quad (1)$$

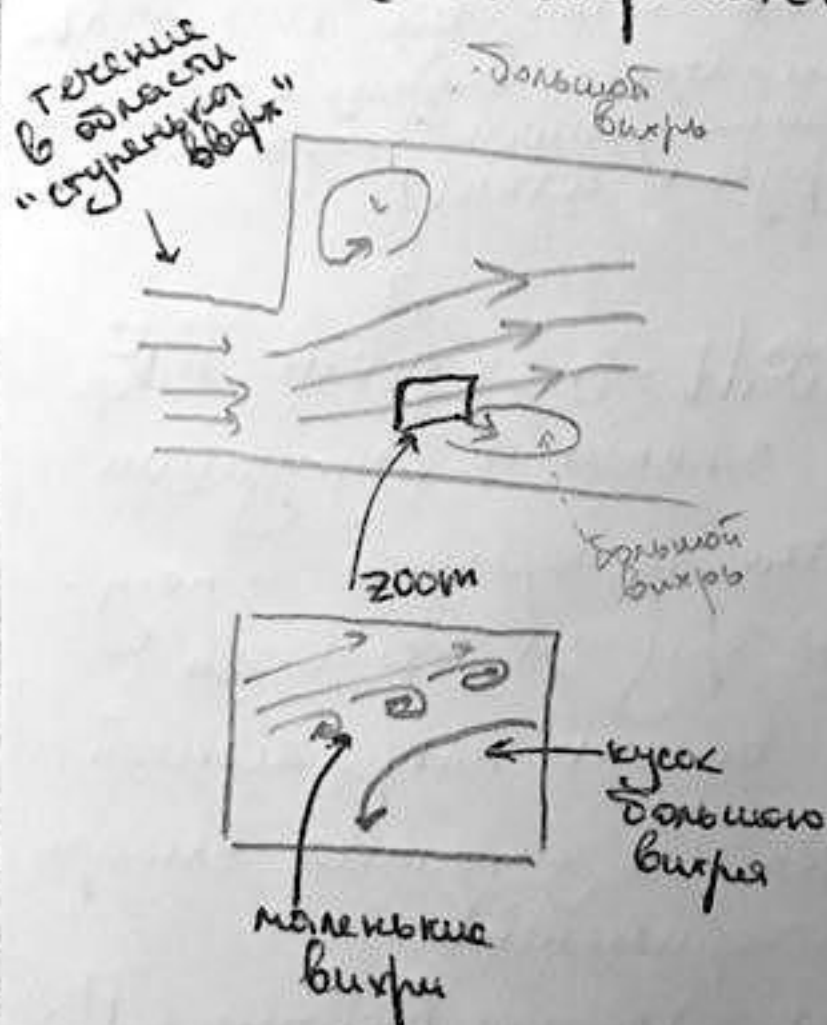
Известно, что при достаточно больших Re (при $Re > Re_{crit}$, для разных областей это Re_{crit} разное) возникают турбулентные течения.

Тут стоит сказать, что определение турбулентности толком никто дать не может, но в целом это что-то типа течения с большим числом нестационарных вихрей. При больших Re вклад переносных членов $(\vec{v}, \nabla) \vec{v}$ превешивает вклад вязкости $\Delta \vec{v}$, и начинается болтанка.

Основное свойство турбулентности — это её многомасштабность, т.е. в течение возникает большое число вихрей от больших до совсем малых. (см. отвлечённо нарисованную картинку).

Самый маленький вихрь имеет размеры Колмогоровских масштабов, которые определяются Re (чем больше Re , тем меньше могут быть вихри).

Для моделирования течения по-любому надо ввести сетку в рассматриваемой области. Если введём сетку крупнее Колм. масштабов $\Rightarrow$ не уловим мелкие вихри.



Есть 3 основных идеи моделирования турбулентности:

DNS
(direct numerical simulation)

LES
(large eddy simulation)

RANS
(Reynolds-averaged Navier-Stokes)

DNS

Честно аппроксимирует уравнения (1) на очень мелкой сетке, улавливающей мелкие вихри. Если использовать явные схемы, то из-за мелкой сетки будут ужасные ограничения по ~~суде~~ шаг по времени $\Rightarrow$ нужен суперкомп.

Неявные схемы — ограничения ~~уже~~ по шаг по времени уже не такие жесткие, но получаем огромную СЛАУ, которая может не влезть в ОЗУ $\Rightarrow$ нужен суперкомп.

Дальше тут надо бы кратко про основные идеи при ~~моделировании~~ моделировании явных и неявных МОВ (т.е. FDM, FEM)

LES

Моделирование крупных вихрей
Тут в основном берут сетку крупнее колмогоровских масштабов $\Rightarrow$ и опять решают на ней (1)
 $\Rightarrow$ теряются мелкие вихри. Их потом пытаются восстановить по каким-нибудь эмпирическим моделям, взятым из физ. экспериментов. Тут в целом тоже нужен суперкомп, т.к. сетки все еще мелкие, но зато все уже решается быстрее. (Навы-бокса вообще очень сложно решать, даже на грубых сетках)

RANS

Здесь уже меняют сами уравнения (1)
Представляют $\vec{v} = \vec{v}_{\text{ср.}} + \delta \vec{v}$, где $\int_0^T \delta \vec{v} dt = 0 \Rightarrow \int_0^T \vec{v} dt = T \cdot \vec{v}_{\text{ср}}$
т.е. — то функции

Все это дело подставляется в (1), интегрируется по времени и получаются почти те же уравнения, но уже для средних величин $\vec{v}$ и еще в правую часть добавляется тензор вязких напряжений $\frac{\partial(\delta v_i \delta v_j)}{\partial x_k}$. Здесь мы не знаем δv_i , они обычно заданы эмпирическими формулами через $\vec{v}_{\text{ср}}$ на основе физ. экспериментов.
Здесь уже расчеты проводят на грубых сетках $\Rightarrow$ можно обойтись и ПК.

18) Проверка гип. $H_0: H\beta = r$

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t, t = \overline{1, n} \quad y = X\beta + \varepsilon$$

$$H_0: H\beta = r \quad H \in \mathbb{R}^{q \times k}, \beta \in k \times 1, r \in q \times 1 \\ \text{rank}(H) = q \leq k$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$E(\hat{\beta}_{OLS}) = \beta$$

$$V(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_{OLS} \sim N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1})$$

$$\Rightarrow H\hat{\beta} - r \sim N(H\beta - r, \Sigma), \text{ где } \Sigma - \text{матрица } q \times q:$$

$$\Sigma = V(H\hat{\beta} - r) = V(H\hat{\beta}) = \\ = HV(\hat{\beta})H' = \sigma^2 H(X'X)^{-1}H'$$

$$\Rightarrow H\hat{\beta} - r \sim N(H\beta - r, \sigma^2 H(X'X)^{-1}H')$$

При условии справедливости $H_0: H\beta = r$ получаем

$$\frac{1}{\sigma^2} (H\hat{\beta} - r)' (H(X'X)^{-1}H')^{-1} (H\hat{\beta} - r) \sim \chi^2(q)$$

$$F = \frac{(H\hat{\beta} - r)' (H(X'X)^{-1}H')^{-1} (H\hat{\beta} - r) / q}{e'e / (n-k)} \sim F(q, n-k)$$

Если справедл. $H_0: H\beta = r$, то F не должна принимать слишком больших значений, а именно, с вер-тью $1-\alpha$ имеем $F < F_{\alpha}(q, n-k)$, где $F_{\alpha}(q, n-k)$ есть $100(1-\alpha)\%$ -ная т. распр. Фитнера $F(q, n-k)$

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \beta)' H' (H(X'X)^{-1}H')^{-1} H(\hat{\beta} - \beta) / q}{e'e / (n-k)} \sim F(q, n-k)$$

Усл. $F < F_{\alpha}(q, n-k)$ задает $100(1-\alpha)\%$ -ную довер. обл. для β .

$$y = X\beta + \varepsilon$$

X - гет. матрица

$$E(\varepsilon) = 0$$

$$E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$n \geq k$$

$$H_0: H\beta = r$$

$$H \sim (q, k)$$

$$\beta \sim (k, 1)$$

$$r \sim (q, 1)$$

$$\text{rank}(H) = q$$

q - ограничение
 $q \leq k$

Пример

$$H\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
 q

$$\begin{cases} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 - \beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$F = \frac{(H\hat{\beta} - r)(H(X^T X)^{-1} H^T)^{-1} (H\hat{\beta} - r) / q}{e^T e / (n - k)} \sim F(q, n - k)$$

$F > F_{\alpha}$ - отбрасываем
 F статистика
(Пример)

$$e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}$$

$$H = I$$

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \beta)^T (X^T X)^{-1} (\hat{\beta} - \beta) / q}{e^T e / (n - k)}$$

19) AR(p), MA(q), ARMA(p, q). Ум. ст. 4.

Врем. ряд - ~~последовательность~~ выборка из последовательности случайных величин $X_t, t=1, \dots, T$, наблюдаемая с равными промежутками времени.

AR(p): $X_t = c + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \varepsilon_t$

$a_1, \dots, a_p$ - пар. модели
 c - const. (чаще = 0 для упрощения)
 ε_t - белый шум.

$L: L X_t = X_{t-1}$

$\Rightarrow X_t = c + \sum_{i=1}^p a_i L^i X_t + \varepsilon_t$

или $a(L) X_t = \varepsilon_t$, где $a(L) = 1 - \sum_{i=1}^p a_i L^i$

$a(z) = 1 - \sum_{i=1}^p a_i z^i$

Если корни $a(z)=0: |z| > 1 \Rightarrow$ ряд стационарный

MA(q): $X_t = \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon_{t-j}$, ε_t - белый шум.

b_j - пар. модели. (b_0 можно = 1 без озн. единичности)

$X_t = b(L) \varepsilon_t$, где $b(L) = 1 + \sum_{j=1}^q b_j L^j$

$b(z) = 1 + \sum_{j=1}^q b_j z^j$

Если корни $b(z)=0: |z| > 1$, то временной ряд явл. обратимым, т.е. его можно предст. как бесконечный авторегр. процесс.

$b^{-1}(L) X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j X_{t-j} + \varepsilon_t$

18) аргумент.

ARMA(p, q) :

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}$$

или: $X_t = c + \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i L^i\right) X_t + \left(1 + \sum_{j=1}^q \beta_j L^j\right) \varepsilon_t$

$$\underbrace{\left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i\right)}_{\alpha(L)} X_t = c + \underbrace{\left(1 + \sum_{j=1}^q \beta_j L^j\right)}_{\beta(L)} \varepsilon_t$$

$$\alpha(L) X_t = c + \beta(L) \varepsilon_t$$

Для того, чтобы процесс был стац. необх., чтобы корни $\alpha(z)=0 : |z| > 1$.

Стац. ARMA-проц. можно предст. как бесконеч.

MA-процесс:

$$X_t = \alpha^{-1}(L) c + \alpha^{-1}(L) \beta(L) \varepsilon_t = \frac{c}{\alpha(1)} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}$$

Т.о. ARMA-процесс можно свести к MA-проц.

бесконечного порядка с определенной структурой коэф.

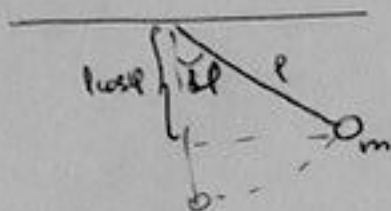
Все стац. процессы можно использовать приблизить ARMA-моделью нек. порядка с помощью существующих методов, не имея только при этом.

MA-модель.

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, n};$$

q_i - обобщенные координаты точки масса; $L(q, \dot{q}, t)$ - ф-я Лагранжа



Возьдем элемент на мале части Δm длины Δl , $\Delta m = \rho S \Delta l$. Тогда высоту точки можно представить как катет. Катет:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m l^2 \dot{\varphi}^2}{2} \quad (v = l \cdot \dot{\varphi})$$

Уравнение Лагранжа: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad L = K - U \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{\Delta m l^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \rho S \Delta l g l (1 - \cos \varphi) =$$

$$= \frac{\rho S \Delta l l^2 \dot{\varphi}^2}{2} - \rho S \Delta l g l (1 - \cos \varphi)$$

Чтобы получить ф-ю Лагранжа для всего стержня, интегрируем по всей длине стержня l .

$$L = \int_0^l \rho S \left(\frac{l^2 \dot{\varphi}^2}{2} - g l (1 - \cos \varphi) \right) dl = \rho S \left(\frac{l^3 \dot{\varphi}^2}{3 \cdot 2} - \frac{g l^2}{2} (1 - \cos \varphi) \right) =$$

$$= \frac{m l^2 \dot{\varphi}^2}{3 \cdot 2} - \frac{m g l}{2} (1 - \cos \varphi)$$

и подставляем это в ур-ие Лагранжа:

~~$$\frac{m l^2 \dot{\varphi}^2}{3 \cdot 2} - \frac{m g l}{2} (1 - \cos \varphi)$$~~

$$\frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi} = - m g \frac{l}{2} \sin \varphi$$

(маленький угол φ мал и $\varphi \approx \sin \varphi$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ур-ие колебаний: } \ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad \ddot{\varphi}$$

$$\omega_0^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l}}$$

Билет 23

Сформулируйте необходимые и достаточные условия продуктивности неотрицательной, неразложимой матрицы в модели Леонтьева и докажите, что матрица A является продуктивной или не явл. таковой

Определение 1: Квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$ $A(N \times N)$ называется разложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ii можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \text{ где } A_1 (m \times m), A_3 ((N-m) \times (N-m)), m < N$$

Утверждение 1: Если матрица A разложима, то и A^2 разложима, причем $A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & A_2^2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$

Теорема (Фробениуса - Перрона)

Если неотрицательная матрица A неразложима, то у нее существует собств. число λ_A такое, что для любого другого собственного числа λ справедливо $|\lambda| < \lambda_A$, а соответствующий правый вектор-столбец x_A ($Ax_A = \lambda_A x_A$), и левый собственный вектор-строка y_A ($y_A A = \lambda_A y_A$) положительны.

Опр. 2: собственное число λ_A назыв. фробениусовым числом, а векторы x_A, y_A - правым и левым фробениусовыми векторами.

$$\exists r = \min_{i=1, N} \Gamma_i, R = \max_{i=1, N} \Gamma_i, \text{ где } \Gamma_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

Утверждение 2: если A неотрицательная неразложимая матрица, то при $r < R$ ее фробениусово число $r < \lambda_A < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$.

Опр. 3: Неотрицательную матрицу A назовем продуктивной, если существует нестр. матрица $(E - A)^{-1}$.

Утверждение 3 (Главный вопрос билета)

Неотрицательная неразложимая матрица A продуктивна $\Leftrightarrow$, когда её фробениусово число $\lambda_A < 1$.

Задача:

$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$ Так как матрица A неразложимая (это надо доказать, подумать как) и неотрицательная, то можно воспользоваться

~~теоремой~~ утверждением 3 (продуктивна $\Leftrightarrow \lambda_A < 1$) и утверждением 2 ($r < \lambda_A < R$)

$$R_A = \max[(0,5 + 0,1 + 0,1), (0,4 + 0 + 0,6), (0,3 + 0,3 + 0,3)] = 1$$

$$r = \min[-||-] = 0,7 \Rightarrow 0,7 < \lambda_A < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ выполнены условия утв. 3 $\Rightarrow A$ - продуктивна.

Билет 23 (продолжение)

Опишите математическую модель Красновского и рассмотрите случай, когда у всех членов коллектива коэфф индивидуализма: $\mu_i = 0, i = \overline{1, N}$ (стадо)

Модель Красновского:

$$P_j = \alpha_j \mu_j + (1 - \mu_j) \sum \lambda_{ji} P_i, \text{ где } j = \overline{1, \dots, N}$$

Обозначения:

- 1) α_j - априорная вероятность перехода индивида с индексом j в рассматриваемое состояние.
- 2) μ_j - степень независимости j -го индивида
- 3) P_j - установившаяся вероятность перехода индивида j в рассматриваемое состояние
- 4) λ_{ji} - вероятность того, что j -й индивид поступит так же, как и i -й, то есть перейдет в новое состояние с вероятностью P_i .

~~Опр. 1:~~ Если $\mu_j = 0$, то j -й индивид ~~не зависит~~ называется абсолютно зависимым (не имеет своего мнения и никак не может повлиять на окружающих)

Опр. 2: Если все $\mu_j = 0, \forall j \in \overline{1, \dots, N}$, то такая группа назыв стадом.

Модель Красновского в матричной форме:

$$P = A M + (E - M) \Lambda P$$

Для случая "стадо" $M = 0 \Rightarrow P(E - \Lambda)P = 0$

Сумма элементов каждой из строк матрицы $E - \Lambda$, в силу свойства: (вероятность ≤ 1), равна 0. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ определитель $(E - \Lambda)$ равен 0. $\Rightarrow$ существует бесконечно много решений, т.е. объясняется отсутствием опред. стремлений. Однако "стадо" движется не хаотично; все P_j равны между собой, т.е. индивиды подражают друг другу: $P_j = \sum_{i=1}^N \lambda_{ji} P_i$

При этом, если в команде вдруг появился индивид, у которого $r_k > 0$, то решение в модели становится единственным: $P_j = \alpha_k$, где α_k - антиорная вероятность k -го индивида. Т.е. поведение k -го индивида копируют все.

Билет 24 (продолж.)

Билет № 25.

Популяционная игра. Равновесие Нэша и строгое равновесие.

Опр. 1. Популяционная игра - это статистическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидов:

$$G = \langle J; f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle,$$

где: • J - множество стратегий участников игры;

• $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - ~~вероятность~~ распределение игроков по стратегиям

• $\Pi = \{\pi \mid \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс.

• $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игрока, использующего стратегию j , в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и соотношению выжившей среды)

Опр. 2. Равновесием по Нэшу популяционной игры G назыв.

такое распредел. π^* , что всякая стратегия с ненулевой частотой, явл. оптимальным ответом на данное распределение при $\forall$ значении ω :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J, (\pi_j^* > 0) \rightarrow j \in \operatorname{Argmax}_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega)$$

Если $f_j(\pi, \omega) = \alpha(\pi, \omega) f_i(\pi) + \beta(\pi, \omega)$, т.е. разложима,

$$\text{то: } \forall j \in J: \pi_j^* > 0 \rightarrow j \in \operatorname{Argmax}_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*)$$

Опр. 3. Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G назыв. такое распредел. π^* , что $\forall \omega \in \Omega, \forall \pi \neq \pi^*, \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1): \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi))$

$$f_{\pi^*}(\lambda \pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda \pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega),$$

где $f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ - средний выигрыш смешанной стратегией, или распределения π , если индивиды в популяции распределены по чистым стратегиям

Строим равновесие популяционной игры G назыв. таким распредел. π^* , что все игроки исполняют одну и ту же стратегию, которая явл. единств. лучшим ^{отвечая} решением на это распредел.:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists j \in J: \pi_j^* = 1.$$

и

$$\forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega: f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon$$

Всякое строгое равновесие явл. ЭУС.

Билет 25 (продолж.).

Популяционная игра.

Популяционная игра - статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

Это понятие подобно игре в нормальной форме в классической теории, и для него обобщаются основные некооперативные принципы оптимальности:

- RH
- *решение по доминированию,*
- а также вводится понятие *эволюционно устойчивой стратегии*

Формально **популяционная игра** G задается совокупностью параметров

$$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle,$$

- где J - множество стратегий участников этой игры
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ - распределение игроков по стратегиям
- $\Pi = \{\pi \mid \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ - стандартный симплекс
- $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j , в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды). Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. В данном разделе эта функция задана экзогенно.

Пример популяционной игры (М. Smith).

Рассматриваются парные конкурентные столкновения за некоторый ресурс. Пусть индивидуумы популяции ищут желаемые объекты (пищу, место для жилья или самку). Некоторые из них получают объект без столкновения, а другие случайным образом сталкиваются в парах, причем одни из них оказываются в роли α хозяина объекта конкуренции, а другие – в роли β захватчика;

- J^α, J^β – множества вариантов поведения (альтернатив) в соответствующих ролях
- $\phi_{j^\alpha j^\beta}^\alpha$ и $\phi_{j^\alpha j^\beta}^\beta$ – выигрыши индивидуумов, если α выбирает вариант $j^\alpha \in J^\alpha$, а β – $j^\beta \in J^\beta$.
- $\lambda(N)$ – вероятность столкновения. Не зависит от стратегий и определяется численностью популяции N .
- ϕ^0 – выигрыш индивидуумов, избежавших столкновения.
- Стратегия индивидуума – пара $j = (j^\alpha, j^\beta)$, где $j^\alpha \in J^\alpha$, а $j^\beta \in J^\beta$ – правило выбора варианта поведения в зависимости от роли.
- Функция $f_j(\pi, N)$ указывает средний выигрыш индивидуумов, использующих стратегию j .

Обозначим через $p_\alpha(\pi)$ и $p_\beta(\pi)$ распределения по вариантам поведения индивидуумов в ролях α и β , соответствующие распределению по стратегиям π . Тогда

$$p_{j^\alpha}(\pi) = \sum_{j^\beta \in J^\beta} \pi_{j^\alpha j^\beta}, \quad p_{j^\beta}(\pi) = \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \pi_{j^\alpha j^\beta},$$

а для стратегии $i = (i^\alpha, i^\beta)$

$$f_{i^\alpha i^\beta}(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \frac{1}{2}\lambda(N)\left(\sum_{j^\beta \in J^\beta} \phi_{i^\alpha j^\beta}^\alpha p_{j^\beta}(\pi) + \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \phi_{j^\alpha i^\beta}^\beta p_{j^\alpha}(\pi)\right).$$

Рассмотрим также случай, когда **участники не различают состояния**. Тогда множество стратегий совпадает с множеством альтернатив: $J = J^\alpha = J^\beta$, $\pi = (\pi_j, j \in J)$, $\phi_{ij}^\alpha = \phi_{ij}$, $\phi_{ij}^\beta = \phi_{ji}$,

$$\bar{f}_i(\pi) = \sum_{j \in J} \pi_j \phi_{ij}, \quad f_i(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \lambda(N)\bar{f}_i(\pi).$$

В этом случае G эквивалентна игре $\bar{G} = \langle J, \bar{f}_i(\pi), i \in J, \pi \in \Pi \rangle$.

Ситуация, когда множество вариантов поведения и значения выигрыша индивидуума не зависят от его роли, возможна и в предыдущей модели. Однако модели поведения для этих внешне похожих ситуаций оказываются совершенно различными.

Основные статические принципы оптимальности.

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е.

$$\forall \omega \in \Omega \text{ и } \forall j \in J (\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega). \quad (2.1)$$

Пусть функции выигрыша в игре G разложимы, то есть имеют вид $f_j(\pi, \omega) = a(\pi, \omega) \bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$, как в модели случайных парных столкновений. Отметим, что та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω . Тогда (2.1) эквивалентно следующему условию, которое уже не содержит параметра ω :

$$\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \Rightarrow j \in \text{Arg max}_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*).$$

Понятие равновесия по Нэшу является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако, из анализа динамических моделей известно, что среди равновесий по Нэшу бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться. Поэтому приведем другие, **более сильные, критерии оптимальности.**

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое распределение π^* , что $\forall \omega \in \Omega \forall \pi \neq \pi^* \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi))$

$$f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi + (1-\lambda)\pi^*, \omega).$$

Здесь $f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ – средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π , если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π' .

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^ , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^* .*

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша (Schaffer, 1988, 1989).

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.

Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{-j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j = S$ такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию. Т.е., "мутант" не получает преимущества перед "основной популяцией" в смысле значения выигрыша.

Так определенная ЭУС может не являться равновесием Нэша. В частности, для игры, соответствующей симметричной олигополии Курно, в равновесии Нэша игроки используют "рыночную власть" и снижают объемы выпуска по сравнению с конкурентным равновесием, в то время как ЭУС соответствует конкурентному равновесию.

Строгим равновесием популяционной игры G называется такое распределение π^* , что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственным лучшим ответом на это распределение:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ и } \exists j \in J : \pi_j^* = 1 \text{ и } \forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega \quad f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon.$$

Отметим, что **всякое строгое равновесие является ЭУС**, в том числе для групп с достаточно большой конечной численностью.

Schaffer (1988) показал, что для случайных столкновений при наличии ролевой асимметрии участников (“хозяин-захватчик” в рассмотренном примере) не существует иных ЭУС, кроме строгих равновесий.

Для функций выигрыша $f_j(\pi, \omega)$ общего вида равновесий по Нэшу может не существовать. В других классах игр их оказывается много, причем большинство из них заведомо неустойчивы. В связи с этим представляет интерес другой принцип оптимальности – **доминирование**, также внутренне связанный с концепцией естественного отбора Дарвина.

Бишет № 26

Модели динамики ретинкантов

В МДР предполагается, что в однородной популяции новые индивидумы (потомки) наследуют стратегии родителей и сохраняют их в течение всего времени жизни. ~~Модель~~

Пусть взаимодействия между индивидумами популяции в каждый период времени описываются популяционной игрой $G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$. Функцией $f_j(\pi, N)$ представляется собой сумма средней рождаемости $f_{ej}(\pi, N)$ и выживаемости $d_j(\pi, N)$ для индивидумов, использующих стратегию j , если общая численность популяции равна N , а распредел. по стратегиям π . Обозначим $N_j(t)$ — число индивидумов, использующих в период t стратегию $j \in J$. Тогда динамика такой популяции описывается системой

$$N_j(t+1) = N_j(t) f_j(\pi(t), N(t)) \quad (1)$$

Таким образом, состояние системы в каждый период времени полностью описывается $\bar{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно ~~определяется~~ определяется

распределение по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = N_j(t)/N(t))_{j \in J}$

Отметим, что в случае, когда $f_j(\pi) = \alpha(\pi, N) \bar{f}_j(\pi)$ из системы (1) вытекает автономная модель динамики $\pi(t)$:

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t) \bar{f}_j(\pi(t)) / \sum_{i \in J} \pi_i(t) \bar{f}_i(\pi(t)), j \in J.$$

(27) Т. о связи р. Нэша и строг. равн. с уст. т. möglich
динамическим процессом.

$$G = \langle S, f_s(\pi, N), s \in S, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$$

Σ стр. равн.
и вынужд.
для игр
со строг. т.

распр.
по
строг.

одн.
числ.
напр.

G - не минимизация
опт. поуп. игр

$$N_j(t+1) = N_j(t) f_j(\pi(t), N(t))$$

- динамический процесс

сост. из вектор. период. полн. пар.-из векторов $\bar{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$
по кот. одност. стр. распр. по строг. $\bar{\pi}(t) = (\pi_j(t) = \frac{N_j(t)}{N(t)})_{j \in J}$.

$N_s = \bar{\pi}_s N$ - числ. испов. стр. S

$$(x) N_s(t+1) = N_s(t) f_s(\pi(t), N(t)), t = 1, 2, \dots, \text{ где}$$

$$f_s(\pi, N) = f_{es}(\pi, N) + v_s(\bar{\pi}, N) \quad \text{- ф. приспособл. стр. S}$$

Т. 3.1 (о связи р. Нэша и уст. точек MDP)

$$\exists f_s \text{ разложимые: } f_s(\bar{\pi}, w) = \underbrace{a(\bar{\pi}, w)}_{>0} \bar{f}_s(\bar{\pi}) + v(\bar{\pi}, w).$$

$\Rightarrow$ 1) $\forall$ уст. (по Ляпунову) распр. $\bar{\pi}^*$ сит. (x) явл. р. по Нэшу
полн. и при $\bar{G} = \langle S, \bar{f}_s(\bar{\pi}), s \in S, \bar{\pi} \in \Pi \rangle$

2) если полн. распр. $\bar{N}(0) > 0$ и для траект. $\{\bar{N}(t)\}$

$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\pi}(t, \bar{N}(0)) = \bar{\pi}^*$, то $\bar{\pi}^*$ явл. р. Нэша указ. попул. проц.

Т. 3.2 (об асимпт. уст. ДУС)

$\exists$ в уст. Т. 3.1 $\bar{\pi}^*$ - асимпт. уст. распр. сит. (x)

$\bar{\pi}^*$ - асимпт. уст. распр. сит. (x)

Т. 3.3 (о связи домин. мн-в стр. с динамич. поведением)

$\exists S$ - строго домин. мн-во строг. в игре $G' = \langle S, \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}_s(\bar{\pi}), s \in S, \bar{\pi} \in \Pi \rangle$

Тогда для $\forall s \notin S$ и $\forall \bar{N}(0) > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\pi}_s(t, \bar{N}(0)) = 0$ на соотв. стр. сит. (x)

(28) Модель вз-ия родов. Угв о доминирующей стр. Распр. альтернатива и попер.

] вз-ие в попул. хар. ин-вом стр. S и ф-лами приспособл. $f_S(\pi)$, $s \in S$. Индив. способен различать особей (родов) среди др. членов попул. и выбрать соотв. стр. Полная стр. (s, s') включает: s - для особей s' - для прочих $\lambda_r \in (0, 1)$ - индивид. вз-ия с особями

$$\bar{f}_{(s, s')}(\pi') = \lambda_r \underbrace{f_s^r(s)}_{\substack{\text{ф. отне.} \\ \text{рез-т} \\ \text{вз-ия} \\ \text{с особями}}} + (1 - \lambda_r) \underbrace{f_{s'}(\pi')}_{\text{распр. по } s'}$$

Предполаг., что все особи примен. одну (уюнш.) стратегию.

$\Rightarrow$ вз-ие хар. популяц. игра:

$$\bar{G} = \langle \bar{S} = \{ (s, s') \in S \times S \}, \bar{f}_{(s, s')}(\pi) = \lambda_r f_s^r(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi) \rangle.$$

распр. по всем стратегиям.

Т. 5.1

Всякая стр. (s, s') $\bullet$: $s \notin \text{Argmax}_i f_i^r(i)$ строго доминирующей стратегией (s^*, s') , где $s^* \in \text{Argmax}_i f_i^r(i)$. Распр. π явл. р. Нэша $\Leftrightarrow$ для всех указ. неопт. стратегий $\pi_{s, s'} = 0$, а соотв. распр. π' явл. р. Нэша для игры $\langle S, f_{s'}(\pi') \rangle$

(т.е. в отн. типа "решетчатый замык" следо попул. пооп. стратегия, примен. группировки)

Расшир. модиф. модели:

~~Самостоятель.~~ Такого поведения (попул. оказ. в разных ролях доминирующей и подчиненной),

а стр. и ф-лы приспособл. зависят от роли $\Rightarrow$

$$S = (s_2, s_3) \in S \times S \xrightarrow[\text{доминирующее соотношение}]{\text{исключая строго}} S^* = (s_2^*, s_3^*) \rightarrow \max_{(s_2^*, s_3^*)} (f^2(s) + f^3(s))$$

На осн. Т. 5.1 можно сделать вывод, что эволюция поведения в самовоспроизвод. популяциях ведет к корр. поведению, максимизир. суммарную приспособл. особей.

(18) парадокс.

низкий ур. мир. $\Rightarrow$ великая вер-ть об-щ. предв. в (н-е поколен.)

Средство для отпугивания повсеместного распр. кооп. и альт. поведения, напр на машинах суммарной прибыли.

Однако на практике часто и неч. Одна из причин ограниченного распр. кооп. поведения - склонность к внутреннему мутантов-эгоистов.

(19) Многоур. модель налог. системы

Баз. модель Формализм задачи

- 1) фикс. N - агенты ур. 0 (напоплат.)
- 2) $\forall$ агента ур. 0 опр. возможный набор действий T_0 .
 $t_0 \in T_0$ - пар. затрат или агента.
опр. е т.з. интенси: $t_0^*(I)$ зависит от I - доход $\in (I_{\min}, I_{\max})$ (сл. вел.)
 $t_0 \in [t_{\min}, t_{\max}]$, $t_{\min} = t_0^*(I_{\min})$, $t_{\max} = t_0^*(I_{\max})$
- 3) $F(I)$ - ф. распр. I - известная вел. ут-кам. интенси
- 4) Для провер. интенси могут использовать 2 типа соотв:
 - а) доверенные лица лидера, издержки на проверку которыми очень высоки
 - б) $\forall$ необход. лишь рациональные интенси, максимизир. свой отн. доход с учетом зарплат, взятки и штрафов.
- 5) Проблема контроля возникает в связи с тем, что конср. знат. и фактор I надлеж. только действ. на низшем ур. не агентам.

Баз. модель. Заг. с фикс. затрат и играми.

(28) продолж.

Контроль пер. стр. строится след. образом:

- 1) инсп. первое ур-на провер. агентов ур. 0 с вер. $p_1(t_0)$
- 2) Если проверка выявила $t_0 < t_0^*$, то агент 0-го ур
выигрывает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I))$, $t_0 > 1$
ска-то одной проверке на этом ур-не сост. c_1
- 3) инспектор 1-го ур-на может быть в шабле
с провер. агентом. Для предотв. коррупции орг. проверки
2-го ур-на.
- 4) $p_2(t_0, t_1)$ - вер. проверки (зависит от моды агентов
ур. 0 и 1)

...

5) на верхнем ур-не k агентом инсп. огуш. проверка
с вер-тью $p_k(t_0, \dots, t_{k-1})$

6) Если проверка ур-на l выявл. $t_l > t_{l-1}$, то все
агенты ниже уровня урней $l \geq 0, \dots, l-1$
платят штраф $f_l(t_l - t_{l-1})$

(Предлагается не игнорировать коррупцию, а
предотв. откл. от ~~экономич.~~ поведения)

Ср. инспекция P включает: - k - коп-во урней
- $p_1(t_0), \dots, p_k(t_0, \dots, t_{k-1})$ - вер-ти
проверок

Сред. пар. затраты экзистенциальной модели:

$f_0, \dots, f_{k-1}$ - штрафные кэф-ты

$c_1, \dots, c_k$ - расходы на проверки

Задача сост. в нахожд. стратегии инсп., порождающей
коррупцию и одетой прав. действия агентов 0-го ур-на
с мин. издержками на проверки

30) Опт. стр. проверяем фикс. значения параметров и игроков.

Рассм. фикс. число N агентов ур. 0 (наименьшее). Для кажд. из них опр. возм. набор действий T_0 . $t_0 \in T_0$ пар. загр. агента. Опт. с. т. з. инспектируемое действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некот. сл. вел. (которое) $I \in [I_{\min}, I_{\max}]$,

$$t_{\min} = t_0^*(I_{\min}), t_{\max} = t_0^*(I_{\max}). \quad (t_0^*(I) \text{ заранее нам известно})$$

$F(I)$ - ф. распр. I (н.о.р.о.) известн. велич. ут-ном агентам.

Контролирующая иерарх стр. строится след образом:

- || - (из формулы из (28) фикс. загр. и иерархия).

Рассм. коалицию C , вклот. некот. кол-во агентов ур. 0 и инспекторов ур-ней 1, ..., l , $l \leq k$, превращающих работу агентов из этой коалиции страт. C задает ф-ции $t_0(I), \dots, t_l(I)$, опр. поведение ур-ней $i=0, \dots, l$ в случае проверки какого-либо агента ур. 0 из этой коалиции.

Опр. ~~стр.~~ стр. P уст. к откл^{лению} коалиции C , если суммарное возм. ее членов достигает макс при честном поведении, т.е. $t_0(I) = t_0^*(I), t_r(I) = t_r^*(I), r=1, \dots, l$

при усл. честн. поведения агентов верх ур. $l+1, \dots, k-1$

P - уст. к коал. отклонениям, если усл. верно для $\forall l=1, \dots, k-1$. При честн. поведении опт. загр. на одного агента составляет

$$\int_{I_{\min}}^{I_{\max}} (P_1(P, I) (C_1 + P_2(P, I) (C_2 + \dots + P_{k-1}(P, I) (C_{k-1} + P_k(P, I) C_k) \dots)) dF(I),$$

$$\text{где } P_i(P, I) = P_i(t_0^*(I), \dots, t_l^*(I))$$

Лем. 1 Опт. вер-ти проверки в стр. уст. к коалиц. откл., удовл. усл-ям $P_1(t_0) = \hat{P}_1 = 1/t_0$

$$P_s(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}) = \hat{P}_s = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i} \quad \forall t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{s-1} \leq t_{\max}$$

$$s=2, \dots, k.$$

Теперь для заданной ~~стр.~~ P рассм. некоопер. СПР и опр. уст. $\exists$ СПР, соотв. целочисл. поверженно на всех уровнях $0, \dots, k$

Сговор, выгодный для всех агентов $0, 1, \dots, \ell$ возможен, если для нек. $t_\ell \in [t_{\ell-1}, t_0^*(I)]$, $v_{i\ell} \geq 0$, $i=1, \dots, \ell-1$ разрешима след. сист:

$$\begin{cases} P_{\ell+1}(t_0, \dots, t_\ell) f_i(t_0^*(I) - t_\ell) + v_{i\ell} < f_i(t_0^*(I) - t_\ell), i=0, \ell-1 \\ \sum_{i \leq \ell} v_{i\ell} - P_{\ell+1}(t_0, \dots, t_\ell) f_\ell(t_0^*(I) - t_\ell) > 0 \end{cases}$$

взяв на
от i померсан
преобразованную ℓ
 t_ℓ - его координ.

Опр. Если $\forall I \in (I_{\min}, I_{\max}]$, $\ell=1, \dots, k-1$, $t_0 \leq \dots \leq t_\ell < t_0^*(I)$ сист. несовместна, будет говориться, что стр. P опр. СПР с целоч. повержением.

Утв. 2. P опр. СПР с целоч. пов. $\Leftrightarrow$

$\forall t_0, \dots, t_{k-1} < t_{\max}$ вер-ти проверок ур-вн. уст:

$$p_1(t_0) \geq 1/f_0, p_2(t_0, t_1) \geq \frac{f_0}{f_0 + f_1}, p_s(t_0, \dots, t_{s-1}) \geq \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i}, s=2, \dots, k$$

Утв. 3. Опт. естр. в классе СПР с целоч. повержением и опт. стр. уст. к координ. откл., совпадают и ур-вн. усовн.

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = 1/f_0, p_s(t_0, \dots, t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i}$$

Программ

$$\forall t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{s-1} < t_{\max}, s=2, \dots, k$$

архитектуры суперкомпьютеров «Ломоносов» и Blue Gene/L.

Векторно-конвейерные компьютеры. Середина 70-х годов.

Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры.

Программирование: векторизация самых внутренних циклов.

Суперкомпьютер Cray-1

Векторно-параллельные компьютеры. 80-е.

Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры. Небольшое число процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: векторизация самых внутренних циклов и распараллеливание на внешнем уровне, единое адресное пространство, локальные и глобальные переменные.

Суперкомпьютер Cray X-MP

Массивно-параллельные компьютеры. Начало 90-х годов.

Особенности архитектуры: тысячи процессоров объединяются с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память.

Программирование: обмен сообщениями, отсутствие единого адресного пространства, PVM, Message Passing Interface. Необходимость выделения массового параллелизма, явного распределения данных и согласования параллелизма с распределением.

Суперкомпьютер Cray T3D, Суперкомпьютер Intel Paragon XPS140

Параллельные компьютеры с общей памятью. Середина 90-х годов.

Особенности архитектуры: сотни процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: единое адресное пространство, локальные и глобальные переменные, Linda, OpenMP.

DEC AlphaServer, суперкомпьютер Sun StarFire

Кластеры из узлов с общей памятью. Середина 2000-х.

Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: неоднородная схема MPI+OpenMP; необходимость выделения массового параллелизма, явное распределение данных, обмен сообщениями на внешнем уровне; распараллеливание в едином адресном пространстве, локальные и глобальные переменные на уровне узла с общей памятью.

Суперкомпьютер МГУ «Чебышев», «К» суперкомпьютер

Кластеры из узлов с общей памятью с ускорителями. 2010-е.

Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей памятью; на каждом узле несколько ускорителей (GPU, Phi).

Программирование: MPI+OpenMP+OpenCL/CUDA.

Суперкомпьютер МГУ «Ломоносов», Суперкомпьютер Tianhe-2

Особенности современных микропроцессоров:

- один процессор, как правило, содержит несколько ядер
- используется многоуровневая система кеширования доступа к памяти (L1 кеш очень быстрый и для одного ядра; L2 кеш больше, но медленнее, но все еще для одного ядра; L3 кеш еще больше и для всего процессора). Кешируются как данные, так и инструкции
- процессор может переупорядочивать или смешивать инструкции и доступы к памяти
- появляются физические акселераторы для некоторых вычислительных задач (например, для криптографии или архивирования/кодирования)
- инструкции конвейеризируются, то есть разбиваются на мелкие части (вроде получения инструкции, декодирования инструкции, чтения операнда из памяти, вычисления выражения и записи результата, на самом деле у современных процессоров таких частей 16-32), что ускоряет работу инструкций
- появляются специализированные процессоры, например, GPU. Они имеют свои особенности: огромное число ядер (которые одновременно исполняют одну и ту же инструкцию), специальные правила доступа к памяти, большое количество регистров

Ломоносов состоит из гибридных вычислительных узлов на процессорах **Intel Xeon** (либо 2 процессора по 4 ядра, либо 2 процессора по 6 ядер и 12-48 гб памяти на узле) и GPU-процессоров **Nvidia**. Количество x86 узлов: 5104, графических узлов 1065, x86 процессоров/ядер 12 346 / 52 168, графических ядер 954 240, суммарная оперативная память 92 Тб. Узлы соединяются четырьмя сетями: Infiniband для вычислений, 2 x Gigabit Ethernet для сервисной и управляющей сети, и отдельная сеть для глобальных барьеров и прерываний. Есть общая ФС. Пиковая производительность **1.7 Пфлопс**.

BlueGene состоит из вычислительных узлов с двумя процессорами **PowerPC 440 700MHz** (в процессоре по 4 ядра) и 2GB памяти на узел. В одной стойке находится 1024 вычислительных узла, есть две стойки. Суммарное количество ядер — 16384, память 4 ТВ. Есть 5 коммуникативных сетей: тор для пересылок точка-точка, сеть для коллективных операций, сеть для глобальных барьеров и прерываний, функциональная и сервисная Ethernet-сети. Пиковая производительность **28 Тфлопс**.

Последовательная сложность алгоритма — число операций, которые нужно выполнить при его последовательном исполнении.

Параллельная сложность алгоритма — число шагов, за которое можно выполнить данный алгоритм в предположении доступности неограниченного числа необходимых процессоров (функциональных устройств, вычислительных узлов, ядер и т.п.).

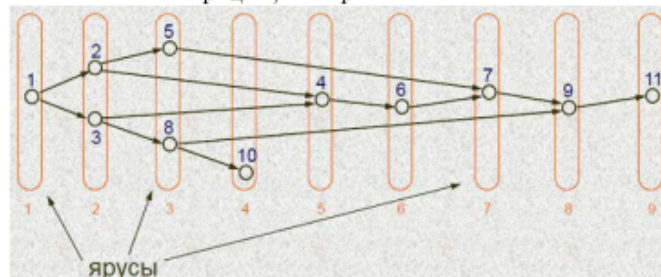
Граф алгоритма — это ориентированный ациклический мультиграф, вершины которого соответствуют операциям алгоритма, а дуги — передаче данных между ними. Вершины графа алгоритма могут соединяться несколькими дугами, в частности когда в качестве разных аргументов одной и той же операции используется одна и та же величина. Граф алгоритма почти всегда является параметризованным графом. Он используется как удобное представление алгоритма при исследовании его структуры, ресурса параллелизма, а также других свойств. Его можно рассматривать как параметризованную информационную историю. Он сохраняет ее информативность, при этом обладая компактностью за счет параметризации. Разработана методика построения графа алгоритма по исходному тексту программ.

Ярусно-параллельная форма (ЯПФ) — это представление графа алгоритма, в котором:

- все вершины разбиты на перенумерованные подмножества ярусов
- начальная вершина каждой дуги расположена на ярусе с номером меньшим, чем номер яруса конечной вершины
- между вершинами, расположенными на одном ярусе, не может быть дуг

Высота ЯПФ — это число ярусов. **Ширина яруса** — число вершин, расположенных на ярусе. **Ширина ЯПФ** — это максимальная ширина ярусов в ЯПФ.

Канонической ярусно-параллельной формой называется ЯПФ, высота которой на единицу больше длины критического пути, а все входные вершины расположены на первом ярусе. Для заданного графа его каноническая ЯПФ единственна. Высота канонической ЯПФ соответствует параллельной сложности алгоритма. Критический путь графа — путь максимальной длины в ориентированном ациклическом графе. **Степень параллелизма** — число операций, которые можно выполнять в любом порядке.



Ресурс параллелизма — это где и насколько мы можем сделать программу более эффективной за счет распараллеливания.

Закон Амдала

$$S_p \leq \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

где S_p — ускорение, α — доля последовательных операций, p — число процессоров в системе.

Появились архитектур комп. и периферийные устр-тия.

2) Векторно-кабинетные комп. (Cray-1)

возник в середине 70-х годов.

Особенности архитектуры: векторные фр-ты устр.,
защитные фр-ты устройств, векторные команды
в системе команд, векторные регистры.

Программирование: векторизация самых
внутренних циклов.

2) Векторно-параллельные комп.

Начало 80-х годов. Cray X-MP, Y-MP

Особенности архитектуры: вектор фр-ты
устройства, защитные фр-ты устройств,
векторные команды в системе команд, век. рег.,
небольшое число процессоров объединены под
общей памятью.

Программирование: векторизация самых
внутренних циклов, распар. на внешнем уровне,
единое адр. про-во, локал. и глобал. переменные.

3) Массивно-параллельные комп.

Начало 90-х годов. Cray T3D, Intel Paragon

Особенности арх-ры: 1000 процессоров объединяются
с помощью коммуникационной шины по некоторой
топологии, распределенная память.

Программирование: обмен сообщениями, нет
единого адр. про-ва, Message Passing Interface.

Необходимость выделение массивов памяти,
явное распр. данных, сложное перем. с
распределением.

4) Парал. комп. с общей памятью.

Середина 90-х годов; Суперкомп. Sun StarFire.

Осб. архитектуры: сотни процессоров объединяются
под общей памятью.

Программирование: единое адр. пробо, кок. и
люб. перемещим, Link, Open MP.

5) Кластеры из узлов с общей памятью.

Начало 2000-х. Суперкомп. МГУ "Гребнев".

Особ. арх-ты: большое число многопроц. узлов
объединяются коммуникационной сетью по
каждой топологии, распределенная память;
в рамках узла несколько (много ядер) процессоров
объедин. под общ. памятью.

Програм-ии: неординар. схема MPI + Open MP. необходимые
вычисления массового парам-тра, общее распредел. данных;
обмен сообщ. на внешнем уровне; распарал. в едином
адр. пространстве, кок. и люб. перемещим на уровне
узла сообщ. памятью.

6) Кластеры из узлов с общей памятью с
ускорителями.

Средина 2000-х; Суперкомп. "Ломоносов".

Особенности архитектуры: большое число
многопроц. узлов объединяются коммуникационной
сетью по некоторой топологии, распредел. память,
в рамках каждого узла несколько (много ядер)
процессоров под общей памятью; на каждом
узле несколько ускорителей (GPU, Phi)

Программирование: MPI + Open MP + OpenCL/CUDA.

Суперкомп. моделирование турбулентных течений.
 4 уравнение Навье-Стокса для несжимаемой
 жидкости:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = + \nu \Delta \vec{v} \end{cases}$$

По сие безразмеривания $\vec{v}$ - скор. течение, p - давление
 известны.

$$(1) \begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \operatorname{grad} p = \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} \end{cases}$$

Известно, что при достаточно больших Re ($Re > Re_{crit}$,
 для разных областей этот Re_{crit} разный) возникают
 турбулентные течения.

Другие турбулентности точно дать не может,
 но в целом это подобно течению с большим
 числом вихревых вихрей. При больших Re
 вихрь переносных членов $(\vec{v}, \nabla) \vec{v}$ превращается вихрь
 возмущения $\Delta \vec{v}$ и называется бо́льшая.

Основное св-во турбулентности - её многомасштабность.
 М.е. в течении возникает большое число различных
 по размеру вихрей. Самый маленький вихрь имеет
 размеры Колмогоровских масштабов, которые
 определяются Re (чем больше Re , тем меньше могут
 быть вихрь)

Для моделирования течения нужно ввести сетку
 в рассматриваемой области. Если ввести
 сетку крупнее Колмогоровских масштабов, мы
 не сможем увидеть мелкие вихри.

3 основных моделей моделирование
 турбулентности

DNS
 direct numerical
 simulation

LES
 large eddy
 simulation

RANS
 Reynolds-averaged
 Navier-Stokes

DNS: Аппроксимирем уравнение (1) на мелкой сетке, добавив мелкие вихри. Если использовать явные схемы, то из-за мелкой сетки — очень много времени $\Rightarrow$ нужен суперкомп.

Квадратные схемы — огр. по времени меньше, но помутаем сильно и обходимся СААУ, которая может не поместиться в ОЗУ $\Rightarrow$ нужен суперкомп.

LES: N моделирование крупных вихрей

Моделируем сетку крупнее ~~крупнее~~ ^{крупнее} колл. масштаба и решаем на ней (1) $\Rightarrow$ теряем мелкие вихри.

Если возможно восстановить ~~в~~ мелкие вихри например какими-либо эмпирическими моделями из физ. экспериментов. Тогда нужен суперкомп.

RANS: Решаются только уравнения (1)

Представим $\vec{\delta} = \vec{v}_{cp} + \delta \vec{v}$, где $\int_0^T \delta \vec{v} dt = 0 \Rightarrow \int_0^T \vec{\delta} dt = \vec{v}_{cp} \cdot T$

Далее после замены решаем уравнения на крупной сетке. Можно использовать а. отк.

Билет 40

Методы эффективной организации параллельных вычислений на графических процессорах

1) Утилизация латентности памяти

- *Цель:* эффективно загружать Ядра
- *Проблема:* латентность памяти
- *Решение:* CPU: Сложная иерархия кешей

GPU: Много нитей, покрывать обращения одних нитей в память вычислениями в других за счёт быстрого переключения контекста. За счёт наличия сотен ядер и поддержки миллионов нитей (потребителей) на GPU легче утилизировать всю полосу пропускания

2) SIMT (Single instruction, multiple thread) и масштабирование

Виртуальная

- GPU может поддерживать миллионы виртуальных нитей
- Виртуальные блоки независимы (программу можно запустить на любом количестве SM)

Аппаратная

- Мультипроцессоры независимы
- Можно «нарезать» GPU с различным количеством SM

3) Асинхронность в CUDA

Чтобы GPU больше времени работало в фоновом режиме, параллельно с CPU, некоторые вызовы являются асинхронными. Отправляют команду на устройство и сразу возвращают управление хосту. К таким вызовам относятся:

- Запуски ядер (если CUDA_LAUNCH_BLOCKING не установлена на 1)
- Копирование между двумя областями памяти на устройстве
- Копирование с хоста на устройство менее 64KB
- Копирования, выполняемые функциями с окончанием *Async
- cudaMemSet – присваивает всем байтам области памяти на устройстве одинаковое значение (чаще всего используется для обнуления)

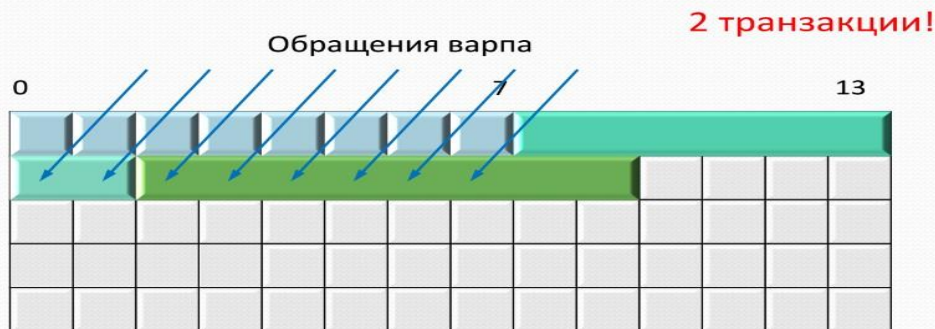
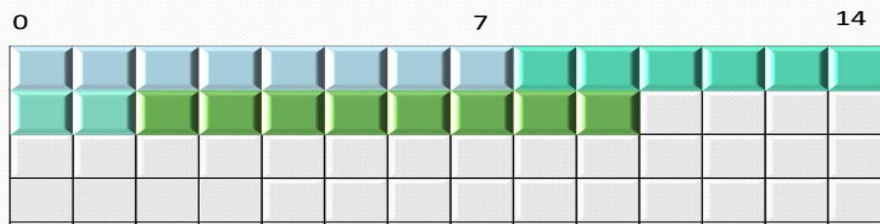
4) Работа с глобальной памятью

- Расположена в DRAM GPU
- Объем до 4Gb
 - Параметр устройства totalGlobalMem
- Кешируется в кешах L1 и L2
 - L1 – на каждом мультипроцессоре (максимальный размер – 48KB, минимальный – 16KB)
 - L2 – на устройстве (максимальный размер - 768 KB, параметр устройства l2CacheSize)

Общие принципы эффективной работы:

- Обращения нитей варпа в память должны быть пространственно-локальными
- Начала строк матрицы должны быть выровнены

Пусть транзакция – $8 \cdot 4 = 32$ байта, адрес транзакции выровнен по 32 байта
Если ширина матрицы не кратна 32 байтам – большая часть строк не выровнена



- Матрицы хранятся в линейном виде, по строкам
- Пусть длина строки матрицы – 480 байт (120 float)
 - обращение – `matrix[idy*120 + idx]`

Адрес начала каждой строки, кроме первой, не выровнен по 128 – обращения варпов в память будут выполняться за **2 транзакции**



- Дополним каждую строку до размера, кратного 128 байтам – в нашем случае, $480 + 32 = 512$, это наш **pitch – фактическая ширина в байтах**
- Эти байты никак не будут использоваться, т.е. $32/512=6\%$ лишней памяти будет выделено (Но для больших матриц эта доля будет существенно меньше)
- Зато каждая строка будет выровнена по 128 байт
 - Обращение `matrix[idy*128+ idx]`



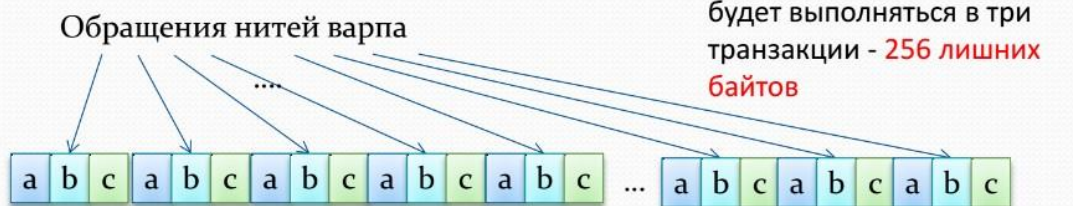
Активация



- Использование массивов структур

```
struct example {
    int a;
    int b;
    int c;
}

__global__ void kernel(example * arrayOfExamples) {
    int idx = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;
    arrayOfExamples[idx].c =
        arrayOfExamples[idx].b + arrayOfExamples[idx].a;
}
```



Активация

```
struct example {
    int *a;
    int *b;
    int *c;
}

__global__ void kernel(example arrayOfExamples) {
    int idx = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;
    arrayOfExamples.c[idx] =
        arrayOfExamples.b[idx] + arrayOfExamples.a[idx];
}
```



- Выбор режима Кеша L1

Кеш может работать в двух режимах: 16 KB и 48KB. Возможные режимы

- cudaFuncCachePreferNone – без предпочтений (по умолчанию). Выбирается последняя использованная конфигурация. Начальная конфигурация – 16KB L1
- cudaFuncCachePreferShared - 16KB L1
- cudaFuncCachePreferL1 - 48KB L1

Если в ядре не используется общая память, то заведомо стоит включить cudaFuncCachePreferL1.

- Избегать косвенной адресации
 - Использование косвенной адресации нежелательно, поскольку требует двух чтений из памяти (сначала A[i], потом A[i][j])
 - A[i] для разных нитей варпа скорее всего будут в одной кеш- линии → одно обращение к кешу
 - Но A[i][j] в общем случае могут быть разбросаны

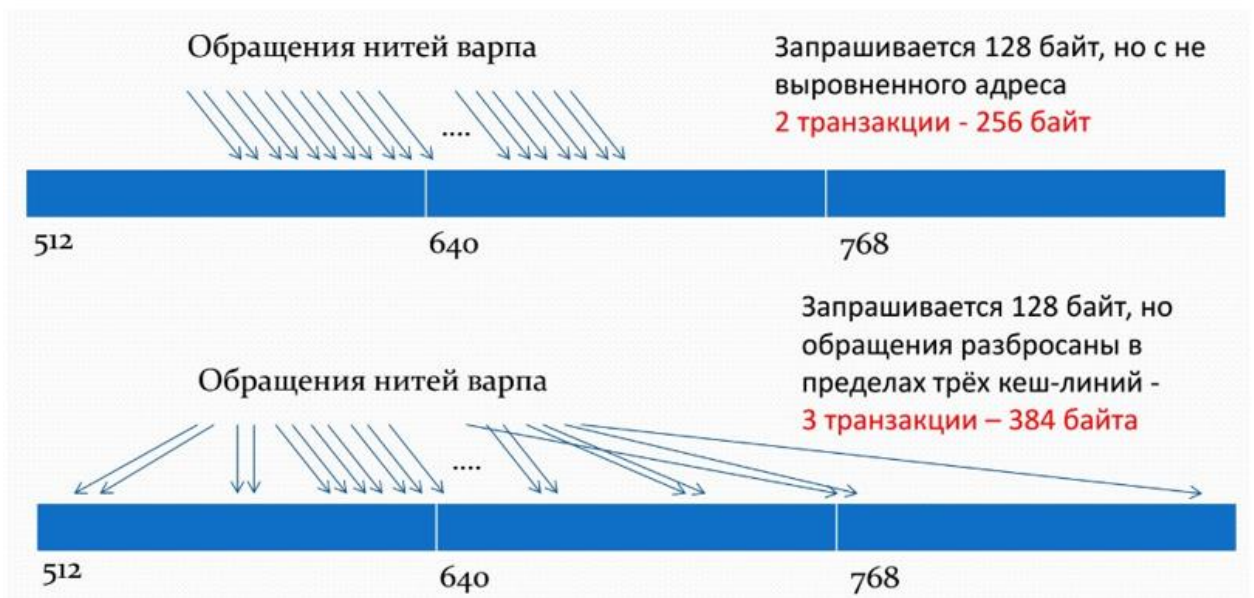
- Принципиального решения нет! Скорее всего придется переработать алгоритм.
- Избегать обращений нитей варпа к столбцу матрицы

Матрица расположена по строкам, а обращение происходит по столбцам



Решение – хранить матрицу в транспонированном виде! (В этом случае обращения по столбцам превратятся в обращения к последовательным адресам, а выделять память под транспонированную матрицу также через `cudaMallocPitch`)

- В случае сильно разряженного доступа проверять работу с отключенным кэшем
 - Транзакция – выполнение загрузки из глобальной памяти сплошного отрезка в 128 байт, с началом кратным 128
 - Инструкция обращения в память выполняется одновременно для всех нитей варпа
 - Выполняется столько транзакций, сколько нужно для покрытия обращений всех нитей варпа
 - Если нужен 1 байт – все равно загрузится 128.



- Ядра взаимодействуют не с памятью напрямую, а с кешами
- Транзакция – выполнение загрузки кеш – линии
 - У кеша L1 кеш – линии 128 байт, у L2 – 32 байта
 - Кеш грузит из памяти всю кеш линию, даже если нужен один байт
- Можно обращаться в память минуя L1
 - Транзакции будут по 32 байта